UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O DESENVOLVIMENTO DA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA: UM ESTUDO NO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE

Deolinda Maria Guerreiro Custódio Ribeiro

Mestrado em Educação

Didáctica da Matemática

2005

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O DESENVOLVIMENTO DA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA: UM ESTUDO NO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE

Deolinda Maria Guerreiro Custódio Ribeiro

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação
na especialidade de Didáctica da Matemática

Orientadora: Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina

2005

Resumo

O presente estudo tem como objectivo compreender o papel da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática e, em especial, o seu contributo para o desenvolvimento da comunicação matemática. Com este propósito formularam-se as seguintes questões: a) O que é que os alunos aprendem de Matemática quando resolvem problemas?; b) Qual o papel do grupo nesse processo?; c) Que interacções ocorrem na actividade de resolução de problemas capazes de desenvolver nos alunos a capacidade de comunicar?

Dada a natureza do estudo, optei por uma metodologia qualitativa de cunho essencialmente interpretativo. Realizei a recolha de dados numa turma de 4.º ano de escolaridade a partir de entrevistas à Professora e a um grupo de quatro alunos sobre quem esteve focalizada a minha atenção enquanto o trabalho em grupos decorreu, da observação directa de seis aulas de resolução de problemas e da análise documental constituída pelos registos escritos de todos os alunos. Optei por fazer apenas uma entrevista a cada participante, antes do início das observações.

Os dados permitem-me afirmar que, quer os alunos com melhores níveis de desempenho, quer os mais fracos, desenvolveram compreensão e conhecimento, utilizaram conhecimentos adquiridos e testaram a sua eficácia, tanto ao nível dos processos como dos conteúdos matemáticos.

Verifiquei que foi durante o trabalho de grupo que os alunos mais se envolveram, por iniciativa própria, em processos matemáticos como reflectir, avaliar e criticar.

A actividade de resolução de problemas proporcionada pelo estudo permitiu que os alunos desenvolvessem a aptidão para explicitar oralmente o raciocínio utilizado na procura de uma solução e para representar por escrito as ideias matemáticas, criando assim oportunidade para os alunos comunicarem entre si e com a professora na aula.

Os conflitos existentes entre os elementos do grupo interferiram na concretização de um trabalho conjunto mais produtivo. Contudo, ultrapassados os conflitos internos, trabalhar em grupo possibilitou momentos de interacção comunicativa entre os alunos, permitindo a partilha de conhecimento matemático entre eles.

As interacções ocorridas variaram com a forma como foi feita a abordagem da resolução de problemas na sala de aula. Deste modo, verifiquei que, quer as interacções verticais, quer as horizontais foram decisivas para i) o envolvimento dos alunos na actividade; ii) a criação do espírito investigativo nos alunos; iii) o desenvolvimento da capacidade de comunicar dos alunos.

Os resultados deste estudo salientam a importância dos alunos partilharem e negociarem significados entre si e com o professor na resolução de problemas matemáticos. Indicam também que o professor deverá dar especial atenção à orientação da actividade dos alunos durante a resolução de problemas, tomando uma atitude questionadora que os estimule a contribuir com frequência e a construir o seu próprio conhecimento e durante a discussão final, incentivando, conjuntamente, o questionamento do aluno ao aluno e a argumentação dos mesmos na defesa das suas ideias.

<u>Palavras-chave</u>: aprendizagem, resolução de problemas, comunicação matemática, partilha e negociação de significados, interacções comunicativas, papel do professor, papel do aluno.

Abstract

The present study aims to understand the role of problem solving within the learning of Mathematics and, in special, its contribute for the development of mathematical communication. The following questions were formulated for this purpose: a) What do pupils learn from Mathematics when they solve problems?; b) What is the role of a group in this process?; c) Which interactions occur in the activity of problem solving which enables students to develop the capacity to communicate?

Given the nature of this study, I opted for using a qualitative methodology of an essentially interpretative character. I undertook the gathering of data from a 4th grade class by interviewing the teacher and a group of four students, on whom I focused my attention, whereas group work was carried out from direct observation of six problem solving classes and from documentary analysis comprising all pupils' written records. I opted to interview each participant only once, at the outset of observations.

The data allows me to affirm that, both the students with better levels of achievement and those with lower ones developed knowledge and understanding, used the acquired knowledge and tested its efficiency, both at the level of processes and mathematical contents.

I verified that pupils became more involved during group work, by their own initiative, in mathematical processes such as reflection, assessment and critique.

The problem solving activity proportionate by this study allowed pupils to develop the ability to explain orally the reasoning used in the search of a solution and to represent, by writing, mathematical ideas, thus creating the opportunity for pupils to communicate among themselves and with the teacher during the class.

The existing conflicts among the elements of the group have interfered in the achievement of a more productive team work. However, once internal conflicts had been overcome, team work enabled moments of communicative interaction between students, permitting the sharing of mathematical knowledge between themselves.

The occurring interactions varied in the manner problem solving was approached in the classroom. In this way, I verified that, both vertical and horizontal interactions were decisive for i) the involvement of pupils in the activity; ii) the creation of a spirit of investigation by pupils; iii) the development of pupils' communication capacity.

The results from this study highlight the importance of pupils sharing and negotiating meaning between themselves and with the teacher in the resolution of mathematical problems. They also indicate that the teacher should give special attention to guiding pupils during problem solving activities, and taking an enquiring attitude that stimulate them to often contribute and build up their own knowledge. During final discussion the teacher should encourage the questioning among pupils, together with self-argumentation for the defence of their own ideas.

Key-words: learning, problem solving, mathematical communication, sharing and negotiation of meanings, communicative interactions, role of the teacher, role of the student.

Agradecimentos

À minha orientadora pela disponibilidade, sugestões e estímulo que sempre me proporcionou

À professora e alunos que participaram neste estudo pela sua pronta colaboração

À minha família por me acompanhar e dividir com este meu trabalho toda a atenção que eu lhes devia

O meu muito obrigada, sempre!

Índice Geral

Capítulo I. Introdução **1**

Formulação do problema 1
Pertinência do estudo 3
O meu interesse 5

Capítulo II. Enquadramento teórico **9**

Contextos de aprendizagem 9
Aprender construindo 9
As interacções 12
A relação professor-aluno 16
A comunicação 18
A comunicação na sala de aula 19
Ambiente de aprendizagem 25
O papel do professor 29
Modos de trabalhar na sala de aula 32
A resolução de problemas 36
A resolução de problemas no 1.º Ciclo 36
A resolução de problemas e clarificação de conceitos 38
Exercícios e problemas 39
Problemas e investigações 41
A resolução de problemas na sala de aula 43
Tipos de problemas de matemática 48
Fases na resolução de problemas 50
Estratégias de resolução de problemas 51
A formulação de problemas 53

Capítulo III. Metodologia **57**

As opções metodológicas 57

O contexto do estudo.. 59
Os participantes.. 59
A escola.. 60
A Professora.. 61
A Turma.. 63
O Grupo.. 64
A Bela.. 65
O Daniel.. 66
A Sara.. 67
O Tomás.. 69
O processo de trabalho.. 70
O trabalho com Ana.. 70
Os problemas propostos aos alunos.. 71
A abordagem dos problemas na sala de aula.. 73
A recolha de dados.. 74
As entrevistas.. 76
A entrevista à Professora Ana.. 76
As situações colocadas na entrevista.. 77
As entrevistas aos alunos.. 78
A observação participante.. 79
Documentos.. 80
A análise dos dados.. 81

Capítulo IV. As crianças e a resolução de problemas.. 83

Introdução.. 83
1. O lobo, a cabra e a couve.. 83
1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma.. 83
2.ª parte da actividade: resolução do problema pelo grupo em foco.............. 87
3.ª parte da actividade: comunicação à turma dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo.. 99
Comentário global.. 102

2. Acerto de contas ... 105
1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma ... 105
2.ª parte da actividade: resolução do problema pelo grupo em foco ... 108
3.ª parte da actividade: comunicação à turma dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo ... 116
Comentário global ... 123

3. Na pizaria ... 125
1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma ... 125
2.ª parte da actividade: resolução do problema pelo grupo em foco ... 128
3.ª parte da actividade: comunicação à turma dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo ... 135
Comentário global ... 143

4. Fósforos e mais fósforos ... 146
1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma ... 146
2.ª parte da actividade: resolução do problema pelo grupo em foco ... 148
3.ª parte da actividade: exploração de regularidades em sequências numéricas ... 158
Comentário global ... 166

5. Higiene dentária ... 168
1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma ... 168
2.ª parte da actividade: formulação e resolução de problemas pelo grupo em foco ... 170
3.ª parte da actividade: comunicação à turma dos problemas matemáticos criados e dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo para o(s) resolver ... 186
Comentário global ... 195

6. Tabela de preços 199

1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma 199

2.ª parte da actividade: formulação e resolução de problemas pelo grupo em foco 199

3.ª parte da actividade: comunicação à turma dos problemas matemáticos criados e dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo para o(s) resolver 213

Comentário global 226

Capítulo V. Conclusões, Recomendações e Limitações 231

Síntese do estudo 231

Conclusões do estudo 232

A matemática aprendida 232

O papel do grupo 234

As interacções comunicativas 236

Recomendações e limitações 239

Referências bibliográficas 243

Anexos 249

Anexo 1 – Informação ao Conselho Executivo 250

Anexo 2 – Informação aos Encarregados de Educação 251

Anexo 3 – Guião da entrevista à Professora 252

Anexo 4 – Situações apresentadas à professora na entrevista 257

Anexo 5 – Guião da entrevista ao aluno 258

Anexo 6 - Situações apresentadas ao aluno na entrevista 261

Índice de quadros

Quadro 2.1 - Aspectos que distinguem *resolução de problemas* de *actividades investigativas*, segundo alguns autores.. 42
Quadro 3.1 - Os problemas propostos aos alunos no âmbito do estudo.................... 71
Quadro 3.2 - Método de Recolha de Dados utilizados neste estudo e sua descrição. 75
Quadro 4.1 - Estratégia apresentada pela Professora para encontrar o número total de pizas.. 142
Quadro 4.2 - Sequências numéricas relacionadas com a sequências de figuras A e C compiladas e escritas pela Professora...................................... 158

Índice de figuras

Figura 1 - A primeira estratégia usada por Daniel para resolver o problema do camponês.. 91
Figura 2 - Registo efectuado por Sara a partir do de Daniel.................................. 92
Figura 3 - Registo de Daniel representando as viagens do camponês.................... 98
Figura 4 - Registo de Tomás representado as viagens do camponês...................... 99
Figura 5 - Os cálculos efectuados pelo grupo em foco para o acerto de contas...... 117
Figura 6 - Os registos do grupo de Sandra para o acerto de contas........................ 118
Figura 7 - Estratégia utilizada pelo grupo de Júlio no acerto de contas.................. 119
Figura 8 - Representação da explicitação de Pedro concebida pela professora....... 122
Figura 9 - Estratégia utilizada pelo grupo de Mara para saber se o anúncio era verdadeiro.. 135
Figura 10 -Estratégia utilizada por Daniel e por Tomás.. 136
Figura 11 -Estratégia utilizada por Bela.. 138
Figura 12 -Estratégia utilizada por Sara.. 139
Figura 13 -Estratégia utilizada pelo grupo de Jacira... 140
Figura 14 -Estratégia utilizada pelo grupo de Dario.. 141
Figura 15 -Trabalho com fósforos desenvolvido por Daniel e seu grupo............... 156
Figura 16 -Sequência numérica que traduz o número de triângulos dentro de cada

figura da sequência de figuras A feita no quadro pela professora......... 160
Figura 17 - Sequência numérica que traduz o perímetro da sequência de figuras A feita no quadro pela professora.. 161
Figura 18 - Sequência numérica que traduz o número de fósforos de cada figura A feita no quadro pela professora.. 163
Figura 19 - Sequência numérica que traduz o número de quadrados dentro de cada figura da sequência de figuras C feita no quadro pela professora 164
Figura 20 - Sequência numérica que traduz o número de fósforos de cada figura C feita no quadro pela professora.. 164
Figura 21 - Sequência numérica que traduz o perímetro da sequência de figuras C feita no quadro pela professora.. 165
Figura 22 - Formulação e resolução de dois problemas efectuadas pelo grupo de Júlio, proporcionadas pela tarefa *Higiene Dentária*............................ 187
Figura 23 - Formulação e resolução de um problema efectuadas pelo grupo de Jonas.. 188
Figura 24 - Formulação e resolução de dois problemas efectuadas pelo grupo de Mónica... 190
Figura 25 - Formulação e resolução de problemas efectuadas pelo grupo em foco... 192
Figura 26 - Resolução do problema matemático criado por Tomás, do grupo em foco... 194
Figura 27 - Formulação de um problema efectuada pelo grupo de Mónica, a partir da *Tabela de Preços* 213
Figura 28 - Estratégia utilizada pelo grupo de Mónica para resolver o problema matemático que criou.. 214
Figura 29 - Formulação e resolução do problema efectuadas pelo grupo de Mara.. 217
Figura 30 - Formulação de um problema efectuada pelo grupo de Márcia........... 219
Figura 31 - Estratégia utilizada pelo grupo de Márcia para resolver o problema matemático que criou.. 220
Figura 32 - Formulação de um problema efectuada pelo grupo em foco.............. 223
Figura 33 - Estratégia utilizada pelo grupo em foco para resolver o problema matemático que criou.. 224

Capítulo I

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresento a formulação do problema em estudo enquadrado no âmbito do 1.º Ciclo, numa perspectiva da valorização da resolução de problemas como uma actividade fundamental da Matemática capaz de implicar activamente os alunos na construção do seu conhecimento em interacção com os outros. Refiro de seguida a pertinência do estudo que se inscreve na ideia de que a realização de actividades como a resolução de problemas podem ajudar os alunos a partilhar raciocínios e a negociar significados, contribuindo para que aprendam matemática com sentido e desenvolvam a sua capacidade de comunicar. Por fim descrevo o meu interesse pelo presente estudo suportado pelo desejo de me desenvolver profissionalmente com o mesmo.

Formulação do problema

Rápidas mudanças e crescentes avanços caracterizam a sociedade em que temos vivido nas últimas décadas. Como tal, é inquestionável o facto da escola de hoje precisar de acompanhar esse acelerado desenvolvimento para fazer face aos desafios que diariamente se colocam. Essa mesma sociedade que tecnologicamente coloca à disposição do indivíduo a mais avançada descoberta, exige que ele seja capaz de interpretar, tomar decisões, resolver situações complexas ou mesmo aplicar ideias matemáticas no seu dia-a-dia.

A aula de Matemática, via resolução de problemas, é o local de eleição para preparar o Homem do futuro e formar cidadãos flexíveis, críticos, eficazes e criativos e a Resolução de Problemas a actividade fundamental da Matemática capaz de desenvolver o raciocínio e a comunicação (NCTM, 1994).

As orientações curriculares para os primeiros anos de escolaridade pressupõem que a aprendizagem se processa de forma dinâmica, com a implicação activa dos alunos na construção do seu conhecimento, em interacção com experiências, activas, significativas, diversificadas, integradas e socializadoras (DEB, 2002). Estas orientações salientam que o professor aborde os conteúdos do campo do saber com base em problemas e situações do quotidiano dos alunos.

A Matemática deve, nesse caso, ser vista como um conjunto de conhecimentos em constante renovação e o saber matemático um produto da actividade do Homem, constituindo um património cultural da humanidade e um modo de pensar, uma linguagem universal.

Assim, para que os alunos tenham essa visão da Matemática devem ser-lhes proporcionadas actividades que privilegiem o desenvolvimento da capacidade de usar a matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar para além da aquisição de conhecimentos básicos.

Considerando-se a Matemática como uma linguagem e a sua aprendizagem uma actividade social, então, o desenvolvimento da capacidade de comunicar matematicamente torna-se num dos objectivos da disciplina. Desse modo, e se a comunicação não é entendida como uma actividade de um único sentido, ela compreende um conjunto de interacções que podem ocorrer na aula. Ora, como existem diversas formas de comunicação como o ler, escrever, representar e falar sobre Matemática, a actividade que melhor as promove é a Resolução de Problemas (Veia, 1996).

Segundo aquelas orientações curriculares, a resolução de problemas, através de uma aprendizagem cooperativa, facilitadora de experiências activas, é considerada a actividade fundamental da Matemática capaz de desenvolver o raciocínio e a comunicação.

Assim, partindo dos pressupostos enunciados e entendendo a comunicação como a função principal da linguagem na sala de aula, aliado aos resultados de investigações feitas que indicam que o envolvimento dos alunos na resolução de problemas não tem sido devidamente valorizado pela escola, considerei pertinente estudar a relação entre a actividade de resolução de problemas, a aprendizagem da matemática e o desenvolvimento da comunicação em alunos do 4.º ano de escolaridade.

Com o presente trabalho pretendo compreender o papel da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática e, em especial, o seu contributo para o desenvolvimento da comunicação matemática.

Mais especificamente, pretendo responder, no tempo que me é disponível para a sua execução, às seguintes questões:

- O que é que os alunos aprendem de Matemática quando resolvem problemas?
- Qual o papel do grupo nesse processo?

- Que interacções ocorrem na actividade de resolução de problemas, capazes de desenvolver a capacidade de comunicar dos alunos?

Pertinência do estudo

Diariamente somos confrontados com situações matemáticas às quais precisamos de dar uma resposta. Fazer compras, assumir um empréstimo, compreender uma informação baseada em tabelas ou gráficos, são alguns dos problemas que, na sua resolução, implicam o uso da matemática. Mas em que aquilo que é determinante não é a proficiência de cálculo (facilmente resolvido com o recurso a uma calculadora), mas antes um conjunto de conhecimentos e capacidades que permitam perceber qual é a operação adequada, localizar os dados numa tabela, interpretar um gráfico ou decidir a sequência de passos necessários para resolver um problema (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

Vivemos num mundo em crescente desenvolvimento tecnológico, onde a mobilidade social e cultural é uma constante. É esperado que as escolas preparem cidadãos autónomos e activos capazes de enfrentar e resolver os seus problemas, mas também de utilizar a comunicação para expressar e divulgar as suas perspectivas, modos de pensar e agir.

As escolas portuguesas, procurando responder o melhor possível a estes desafios, têm sido, contudo, confrontadas com os resultados dos desempenhos dos seus alunos, revelado tanto em estudos internacionais como nacionais, ao longo de vários anos. O exemplo mais recente é o estudo internacional PISA 2003, em que os estudantes portugueses continuaram a revelar resultados preocupantes nos seus desempenhos, apesar da melhoria ligeira, entre os dados de 2000 e os de 2003. Em todos os domínios avaliados, os alunos obtiveram um desempenho modesto, uma vez comparado com os correspondentes valores médios dos países do espaço da OCDE, revelando apenas melhores resultados que os alunos da Grécia, da Turquia e do México (PISA, 2003). A nível nacional, os resultados constantes no Relatório Nacional das Provas de Aferição 2004, do 4.º ano de escolaridade, da Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC), continuam a não ser animadores. Neste relatório,

> evidencia-se o facto de mais de metade dos alunos que fizeram parte da amostra apresentar um bom nível de desempenho nas competências de conhecimento de conceitos e procedimentos de raciocínio. Por seu lado, no âmbito da Resolução de Problemas e da Comunicação, menos de metade dos alunos atingiu aquele nível de desempenho (ME-DGIDC, 2004, p. 32).

Na tentativa de melhorar os resultados obtidos no âmbito da Resolução de Problemas e da Comunicação, têm vindo a ser produzidas orientações para as práticas lectivas (APM, 1988; APM, 1998; NCTM, 1991). Muitas dessas recomendações foram recuperadas pelos programas de Matemática em vigor, nomeadamente pelos do 1.º ciclo do ensino básico (APM, 1998).

Essas recomendações estão de acordo com a opinião de diversos autores que argumentam que, por ser uma actividade humana, todas as pessoas fazem matemática conscientemente, à semelhança dos matemáticos profissionais (Davis e Hersh, 1995; Goldenberg, 1998a e 1999; Ponte e Serrazina, 2000; Schoenfeld, 1996). As crianças não são excepção e entram na escola com múltiplas experiências, imensa curiosidade e energia, prontas a aceitar novos desafios e a resolver novos problemas (Bransford, Brown e Cocking, 2000). Consentâneo com estas ideias, o *Relatório Matemática 2001* (APM, 1998) recomenda a "realização, pelos alunos, de actividades matemáticas significativas, como a resolução de problemas e a aplicação da Matemática a situações da vida real" (p. 30). Recomenda ainda a diversificação de situações de aprendizagem que incluam modos diferentes de trabalhar (individualmente, em pequenos grupos e em colectivo com toda a turma), mas sempre promovendo a reflexão individual e o desenvolvimento de hábitos de pensamento, através da comunicação na sala de aula. De facto, quando comunicam, as crianças aprendem umas com as outras e os professores ao prestarem atenção às comunicações dos alunos, procurando saber como pensam, obtêm informações que os podem ajudar a tomar decisões acerca do ensino (NCTM, 1998).

Nesta perspectiva, cabe ao professor a criação de um ambiente de sala de aula, no qual os alunos se sintam à vontade para questionar e responder a questões, argumentar e ouvir os argumentos, explicar e ouvir explicações, numa verdadeira negociação de significados (Bishop e Goffree, 1986). A cada criança é dada a oportunidade de construir o próprio conhecimento, num ambiente conjunto, compartilhado, em que ela, com a ajuda do professor ou dos colegas pode revelar-se cada vez mais competente e autónoma na resolução das tarefas, no domínio dos conceitos e processos matemáticos (Becker e Selter, 1996). As recomendações do NCTM (1998) sugerem a propósito que "interagir com os colegas da turma ajuda as crianças a construir o conhecimento, a aprender outras formas de pensar sobre as ideias e a clarificar o seu próprio pensamento" (p. 34).

Nesse ponto de vista, o programa de Matemática em vigor aponta três grandes finalidades para o ensino da Matemática, duas delas são precisamente desenvolver a capacidade de comunicação e desenvolver a capacidade de resolver problemas (DEB 2002). Da mesma forma, o *Currículo Nacional do Ensino Básico – competências essenciais*, refere que a competência matemática se desenvolve através experiências ricas e diversificadas como a resolução de problemas, actividades de investigação, realização de projectos e jogos (DEB, 2001).

Jesus (2004), no seu estudo, verificou que o envolvimento das crianças nas actividades de natureza investigativa na sala de aula permitiu que a maioria delas desenvolvessem capacidades como o raciocínio e a comunicação e ainda que aprofundassem conhecimentos anteriormente estudados, ao mesmo tempo que desenvolveram hábitos de trabalho cooperativo, sentido crítico e autonomia. Acrescenta ainda que apesar de ter verificado indícios de uma forma automatizada de trabalhar em dois alunos, "o envolvimento continuado neste tipo de actividades, pode influenciar positivamente o modo como os alunos vêem e aprendem Matemática" (p. i).

Neste ponto de vista, parece que a realização de actividades como a resolução de problemas podem ajudar os alunos a partilhar os seus raciocínios e estratégias com os colegas e professores e contribuir para que aprendam Matemática com sentido. No entanto, os estudos realizados com alunos portugueses do 1.º ciclo são ainda escassos. Assim, julgo pertinente realizar este trabalho com alunos do 4.º ano de escolaridade na tentativa de compreender o papel da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática e em especial no desenvolvimento da comunicação na sala de aula, neste nível de ensino.

O meu interesse

Ao pretender desenvolver a investigação no âmbito de uma tese de mestrado em Educação na área da Didáctica da Matemática, mais especificamente no primeiro ciclo, pareceu-me pertinente e pessoalmente muito motivador, problematizar a relação entre a actividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos.

A resolução de problemas desde há muito constitui um quadro de aprendizagem que deve estar sempre presente e integrado nos diversos tipos de actividade, podendo ser considerada como fonte de prazer e desafio mental para qualquer criança. Quando os professores apoiam a sua prática pedagógica na resolução de problemas, contextualizam a aprendizagem e propiciam a aquisição de conhecimentos relevantes (Veia, 1996).

Mas, como é que as crianças resolvem problemas de matemática em grupo e como comunicam ou partilham com os outros os caminhos encontrados? Qual é o papel do grupo nesse processo? Como se deve operacionalizar a resolução de problemas na aula de matemática, de modo a desenvolver a capacidade de comunicar matematicamente? Estas são algumas das questões que me mobilizaram para o estudo que agora inicio.

Sabendo que as tarefas a proporcionar aos alunos devem apelar aos seus conhecimentos prévios, pretende-se através da sua resolução responder a muitas questões e despertar a sua curiosidade e entusiasmo, favorecendo a explicitação e verbalização de vários pontos de vista (APM, 1988). Em suma, as tarefas devem ser desafiantes para que o aluno tenha uma efectiva experiência matemática.

O trabalho de grupo tem sido em larga medida defendido pela NCTM (1991) onde se destaca o papel da aprendizagem cooperativa no desenvolvimento da comunicação, da sociabilidade e de capacidades na resolução de problemas. Contudo, esse continua a ser o modo de trabalho menos utilizado em ambiente de sala de aula, como indica o *Relatório Matemática 2001* (APM, 1998). A primeira recomendação constante neste relatório, vai no sentido de os professores incluírem na sua prática pedagógica tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e que valorizem as diversas formas de interacção na aula, criando oportunidades de discussão entre os alunos e de trabalho de grupo.

Também se sabe que muitos dos nossos alunos têm dificuldades em avançar com as suas justificações por não quererem mostrar as suas dúvidas ou recearem julgamentos menos justos por parte dos colegas. Mas, se forem encorajados a falar sobre as suas ideias, eles podem descobrir os seus erros ou inconsistências, clarificar o seu pensamento e partilhá-lo com os outros.

Assim, ao interagirem com os colegas e com o professor, os alunos poderão aprender outras formas de pensar sobre as suas ideias. Aprendem também, a explicar e a justificar os seus argumentos quando forem sujeitos ao questionamento dos seus colegas (Wood et al., 1991, referido por Veia, 1996). Para Veia (1996), as actividades centradas nos problemas possibilitam a criação de uma verdadeira atmosfera de resolução de problemas.

Partindo destes pressupostos, aliados à convicção de que o envolvimento das crianças na resolução de problemas não tem sido devidamente valorizado, nas salas de aula, neste nível de ensino, considero oportuno o presente trabalho.

É meu desejo desenvolver-me profissionalmente com este estudo, mas também que ele mereça atenção privilegiada a favor da sociedade/comunidade, de modo a contribuir para o sucesso de todos os intervenientes em Educação.

Capítulo II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo apresento teorias e resultados de investigações anteriores relativas aos temas deste estudo e que o enquadram. Na primeira secção refiro diferentes contextos de aprendizagem e na segunda, para além de algumas considerações sobre a clarificação de conceitos, abordo aspectos importantes a considerar nas aulas de resolução de problemas.

Contextos de aprendizagem

Aprender construindo

A aprendizagem da criança começa muito antes de ela entrar na escola. A sua curiosidade natural leva-a a procurar activamente o sentido do mundo que a rodeia. Qualquer situação com que a criança se venha a defrontar na escola tem, portanto, sempre uma história prévia (Bransford *et al.* 2000; Coll, Martin, Mauri, Miras, Onrubia, Solé e Zabala, 2001; Vygotsky, 2003).

Desde o nascimento que as crianças são sistematicamente confrontadas com diversas experiências, ainda que muito simples, desenvolvendo já uma certa compreensão conceptual antes de lhes serem ensinados formalmente, na escola, vários conceitos (Becker e Selter, 1996; Bransford *et al.*, 2000). Neste caso, o conhecimento matemático das crianças em diversos domínios, assim como as suas estratégias próprias de resolução, podem entrar em conflito com o que lhes é ensinado na escola, se não forem estabelecidas conexões entre eles. Muitas vezes, esse conhecimento e essas estratégias são usados como complemento ou em vez das estratégias ensinadas, fazendo-o com considerável sucesso (Becker e Selter, 1996). A investigação de Carraher e Schliemann (1993), efectuada com crianças brasileiras de rua, mostra que os alunos vêem frequentemente poucas ligações entre a matemática escolar e a realidade, tornando-se um exemplo valioso de como "o ensino da matemática se faz, tradicionalmente, sem referência ao que os alunos já sabem" (p. 21).

Na realidade, as crianças não são as 'tábuas rasas', que aguardavam pela sua entrada na escola para serem gradualmente preenchidas, conforme se pensou durante muito tempo. Elas são antes seres dinâmicos que constróem o seu próprio conhecimento em interacção com o mundo físico, com os materiais e com as outras crianças. Nesse sentido, a aprendizagem deve ser considerada um processo activo de conhecimento por parte das crianças, devendo ser-lhes proporcionada uma vivência de experiências concretas baseadas no mundo que as rodeia. De facto, desde muito cedo elas revelam o desejo de se envolverem em situações intencionais de aprendizagem, desenvolvendo, dessa forma, uma compreensão muito sofisticada de fenómenos que acontecem à sua volta (Bransford *et al.*, 2000).

Para Vygotsky (2003) a aprendizagem realizada pelas crianças antes de entrarem na escola, difere da aprendizagem escolar, por esta última estar voltada "para a assimilação de fundamentos do conhecimento científico" produzindo "algo fundamentalmente novo no desenvolvimento da criança" (p. 110), para além de ser uma aprendizagem sistematizada e a aprendizagem pré-escolar não o ser. Considera, por isso, que aprendizagem e desenvolvimento estão inter-relacionados desde o primeiro dia de vida da criança.

Similarmente, Coll *et al.*, (2001) afirmam que a aprendizagem contribui para o desenvolvimento por se considerar que aprender não é copiar ou reproduzir a realidade. Aprende-se quando se é capaz de elaborar uma representação pessoal sobre um objecto real ou sobre um conteúdo que pretendíamos aprender. Para isso, é necessária uma aproximação a esse objecto ou a esse conteúdo com o intuito de o assimilar, feita a partir de experiências, interesses e conhecimentos prévios. Nesse processo, existe uma modificação do que possuímos, mas também uma interpretação do que é novo de modo a poder integrá-lo como nosso. Quando isso acontece, isto é, quando conseguimos construir um significado próprio e pessoal para um objecto de conhecimento, dizemos que estamos a *aprender significativamente*[1]. Segundo estes autores,

> não se trata de um processo que leve à acumulação de novos conhecimentos, mas antes à integração, modificação e estabelecimento de relações e coordenação entre esquemas de conhecimento que já possuíamos, dotados de determinada estrutura e organização que varia, em vínculos e relações, em cada aprendizagem realizada (p.19).

[1] Itálico dos autores

São essas conexões criadas entre os conhecimentos novos e os existentes que fazem com que os últimos sejam melhor relembrados, permitindo, simultaneamente, aprender mais facilmente (Bransford *et al.*, 2000). Na verdade, os alunos dão significado às coisas a partir daquilo que sabem, da sua experiência anterior. À medida que se vão confrontando com novas situações, os alunos vão estabelecendo relações entre o que já sabiam e as exigências dessas novas situações. A aprendizagem é, por isso, "um processo gradual de compreensão e conhecimento" em que o professor deve criar as melhores condições para que tal ocorra (Abrantes *et al.* 1999, p. 26). Neste sentido, Voigt (1998) salienta que quando os alunos verbalizam e argumentam as suas construções pessoais e ouvem as dos outros verificam e ajustam as suas próprias interpretações, através de um processo interactivo de negociação de significados.

Para elaborar as dimensões da aprendizagem escolar, Vygotstky (2003) criou um conceito de excepcional importância, sem o qual, segundo ele, não seria possível abordar esse assunto: a zona de desenvolvimento proximal. Salientando que a aprendizagem deve ser combinada com o nível de desenvolvimento da criança, este autor define como zona de desenvolvimento proximal

> a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (p. 112).

A zona de desenvolvimento proximal é um lugar onde graças aos reforços e ajudas dos outros, se torna possível desencadear o processo de construção, modificação e enriquecimento do conhecimento, característico da aprendizagem escolar. De acordo com esta caracterização, aquilo que primeiro se consegue realizar no plano social e interpessoal poderá, depois, ser dominado e realizado autonomamente pelo participante inicialmente menos competente (Coll *et al.*, 2001).

Na opinião de Brousseau (1986), citado por Laborde (1996), o aluno aprende ao adaptar-se a um meio que é factor de dificuldades, contradições e desequilíbrios, à semelhança da própria sociedade humana. O autor acrescenta que a comprovação dessa aprendizagem surge com as novas respostas do aluno, construídas a partir da sua adaptação ao meio. Essas "situações de aprendizagem são um espaço de interacção entre os conhecimentos matemáticos e os aprendizes, organizado pelo professor sob a forma de problema" (Laborde, 1996, p. 30).

Nesse sentido, Goldenberg (1998a) propõe o desenvolvimento de hábitos de pensamento idênticos aos dos matemáticos. Segundo o autor, com a prática eles transformar-se-ão em hábitos mentais que mais tarde os alunos serão capazes de utilizar com facilidade. Sublinha também que "a matemática não são os conteúdos mas o *raciocínio* que descobre, reune e dá sentido a estes conteúdos; a matemática é (em parte) um modo de pensar, um conjunto de hábitos de pensamento" (p. 34). Alguns desses modos de pensar são a tendência para (a) visualizar; (b) descrever formal e informalmente relações e processos; (c) fazer experiências; (d) procurar invariantes e encontrar argumentos lógicos (demonstração) (e) combinar a experimentação e dedução; e (f) construir algoritmos e raciocinar acerca deles (Goldenberg, 1998b). Salienta ainda que, sendo tão úteis ao pensamento matemático, estes modos matemáticos de pensar serão experimentados, exercitados e constantemente usados, não permitindo esquecimentos. Os modos matemáticos de pensar constituem assim, um valioso instrumento para ver e compreender o mundo (Goldenberg, 1999). Mesmo as crianças mais novas, a quem falta experiência, mas não a capacidade para argumentar ou raciocinar, são capazes de entender o mundo que as rodeia com o conhecimento que possuem (Bransford *et al.*, 2000).

Contudo, há que reflectir sobre certas aprendizagens prematuras que parecem dificultar uma aprendizagem com sentido em que as crianças actuam como construtoras do seu próprio conhecimento. De facto, quanto mais coisas o professor disser para as ajudar, mais evita que enfrentem o problema e, portanto que aprendam (Block, Martinez, Dávila e Ramírez, 2000).

A aprendizagem "pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daquelas que as cercam" (Vygotsky, 2003, p. 115). Para este autor, é usufruindo da interacção e da ajuda do outro que a criança pode trabalhar, resolver um problema ou realizar uma tarefa, de tal maneira e a um nível que dificilmente atingiria se trabalhasse sozinha.

As interacções

Vivemos actualmente numa sociedade em constante mudança. Os alunos recorrem facilmente a meios que lhes proporcionam o acesso rápido à informação que desejam. A escola não pode continuar, por isso, a preocupar-se em transmitir apenas conhecimentos. Torna-se imperativo que ela desenvolva capacidades e que os alunos apreendam os conhecimentos e adquiram competências de forma autónoma. À escola compete formar cidadãos críticos que saibam interagir com os outros, em trabalho de equipa, para poderem seleccionar a informação mais útil e necessária e compreender os pontos de vista dos seus parceiros sociais (César, 1999).

Para Renshaw (1996), é no decurso do seu envolvimento em actividades conjuntas com adultos e pares que as crianças desenvolvem o seu pensamento. Este autor salienta também que, durante essas interacções sociais, as crianças fazem mais do que aprender dos outros e que existe desenvolvimento nas crianças porque elas passam por um processo de aquisição de ferramentas culturais[2] que funcionam e actuam como guias em atitudes de aprendizagem cultural.

Bussi (1998) afirma que, nos últimos anos, os estudos sobre interacções na sala de aula de matemática receberam um aumento de atenção na literatura, revelando que a análise das interacções verbais ocorridas faz sobressair o diálogo entre professor e alunos na maioria das salas de aula. Mas, para que tal seja corrigido, esses estudos salientam que os alunos deverão ser encorajados a responsabilizar-se pela aprendizagem, por exemplo, através de grupos pequenos de trabalho, de um tutor ou na discussão com toda a classe.

Becker e Selter (1996) referem que, durante os últimos anos, a investigação tem mostrado que a dimensão social é uma condição intrínseca da aprendizagem matemática. Consideram também que os significados matemáticos emergem entre ou no meio dos indivíduos e nunca são construídos somente no meio individual, nem existem independentemente dos indivíduos. Salientam ainda que, a comunicação é vista como um processo de adaptação mútua, onde os indivíduos negoceiam os significados matemáticos, modificando continuamente as suas perspectivas.

De acordo com César (1999), "as interacções sociais são um poderoso meio para conseguir atingir alguns dos objectivos expressos nos novos currículos..." escolares (p. 38). Ou seja, é interagindo que se desenvolvem atitudes positivas face à Matemática, bem como as capacidades dos alunos e a apreensão de conhecimentos. Estudar como interagem os alunos na sala de aula, enquanto resolvem tarefas matemáticas, a pares ou em pequenos grupos, tem merecido a atenção de muitos investigadores desde há vários anos, na tentativa de combater de forma eficaz a rejeição dos alunos pela disciplina,

[2] Ferramentas culturais, para Renshaw (1996), são diferentes formas de agir, de falar, de gestualizar, de conceptualizar, de representar.

bem como o insucesso que lhe tem andado associado. O contexto da interacção, a sala de aula, é um ambiente muito rico, mas também muito complexo, pois coexistem actores sociais com papéis e estatutos muito diferentes. A sala de aula rege-se por regras próprias, implícitas, estabelecidas, partilhadas e negociadas ao longo das interacções por alunos e professores que legitimam o que cada um espera dessa relação, as normas da sala de aula.

Carvalho (2003) salienta que quando os alunos têm oportunidade de trocar pontos de vista, de argumentar resoluções, de constatar que a mesma tarefa pode ter diferentes conclusões, de ouvir os argumentos de outros colegas, de explicar como encontraram um resultado, desenvolvem melhor as suas competências. Evidencia, ainda, que a falta de competências verbais dos alunos menos competentes nas aulas de Matemática se revela muitas vezes uma falsa questão quando estes são confrontados com outro tipo de tarefas e de instruções de trabalho, mostrando com frequência, competências que os professores não conseguem identificar em aulas com normas de sala de aula tradicionais.

César, Torres, Caçador e Candeias (1999) consideram as interacções na sala de aula valiosas por duas razões principais. A saber: (a) facilitam a construção do saber matemático; (b) permitem o relacionamento com os outros, aprendendo a respeitar os colegas, a gerir conflitos afectivos, a resistir à frustração, enfim, a aprender a ser social.

Neste sentido, considera-se o saber matemático como uma construção social, mediada por factores psicossociais e do qual as interacções fazem parte. Outros factores são, por exemplo, as características da situação e da tarefa proposta, as instruções dadas para a sua realização, os actores envolvidos, o estatuto social dos pares ou as normas em vigor na sala de aula (Carvalho, 2003; César, 1999 e César *et al* 1999).

Assim, a interacções sociais na sala de aula desempenham um papel fundamental na aprendizagem da Matemática, uma vez que, quer a interacção professor-aluno[3] quer a interacção aluno-aluno[4], influenciam a matemática que é aprendida e como é aprendida na escola (Wood, Merkel e Uerkwitz, 1996).

Nessa perspectiva, se considerarmos que só há aprendizagem matemática se o aluno for capaz de interiorizar e de dar significado pessoal ao saber matemático escolar, que lhe é preexistente e exterior a si, os processos que são utilizados na sala de aula para facilitar o contacto dos alunos com esse saber, são especialmente importantes. Para

[3] Também denominada por interacção vertical (César, 1999).
[4] Também denominada por interacção horizontal (César, 1999).

apreender esses saberes socialmente construídos, o aluno realiza um duplo processo de desconstrução desse saber e, de seguida, uma nova reconstrução. É nesse duplo processo que se formam os significados pessoais do aluno e as interacções sociais desempenham um papel importantíssimo (César, 1999 e César *et al* 1999).

No contexto das interacções na sala de aula, podem distinguir-se diferentes tipos de interacção. Para Mamede (2001) e de acordo com Roselli, Gimelli & Hechen (1995), existem três modos de interacção: 1) a egocêntrica, que origina o isolamento e a pouca participação nas actividades na aula e que se caracteriza por existirem poucas interacções verbais provenientes de uma atitude individualista ou de uma dificuldade de relacionamento; 2) a assimétrica ou dependente, que ocorre entre indivíduos de níveis diferentes quanto à sua competência, ao seu estatuto social e ainda quanto ao papel que cada um assume durante a tarefa, supondo o domínio de um sobre o outro; 3) a simétrica ou igualitária que assenta na negociação recíproca em que um procura convencer o outro e onde se reconhecem contributos de ambas as partes.

As interacções entre os alunos podem ser diversas. Elas podem manifestar-se desde a execução de tarefas com um par com quem não há comunicação verbal, até às situações em que o grupo de trabalho chega a um acordo sobre uma solução para um problema proposto (César, 1999).

Investigações realizadas ao longo de cerca de duas décadas têm revelado a importância que as interacções sociais têm na apreensão de conhecimentos e aquisição de competências matemáticas (César, 1999 e César *et al* 1999).

Veia (1996), num trabalho em que procurou estudar a forma como três professores do 1.º ciclo encaravam e valorizavam a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação na sua prática profissional, concluiu que, relativamente à comunicação na sala de aula, só uma das professoras valorizava a interacção entre os alunos e com ela e promovia a negociação como forma de chegar a consenso, enquanto que os outros dois se limitavam a promover o diálogo professor-aluno.

Vieira (1997), no estudo que efectuou também com três professoras do 1.º ciclo, revelou-nos a opinião e as práticas dessas docentes acerca das interacções na sala de aula. Esta autora concluiu que, "apesar de serem distintas as opiniões das professoras, é possível afirmar-se que nenhuma concebia a interacção social com a mesma dimensão e importância que lhe atribuem as novas orientações curriculares para o ensino da Matemática" (p. 281). No entanto, com o decorrer das sessões de trabalho colaborativo, duas das professoras adquiriram uma nova concepção sobre este aspecto, acabando por relacionar a interacção com o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, comunicação e argumentação, mas a outra continuou a evitar sempre a interacção aluno-aluno, controlando as suas respostas.

Oliveira (2000), desenvolveu um estudo com alunos do 7.º e 8.º ano em que pretendeu averiguar a importância das interacções na construção do conhecimento matemático dos alunos. Este autor concluiu que os alunos, de um modo geral, gostaram de trabalhar colaborativamente, desenvolvendo interacções aluno-aluno que favoreceram a construção do seu conhecimento matemático. No caso de dois alunos que revelaram dificuldades no relacionamento com os outros, não sabendo interagir com os colegas, não dispensaram a interacção social com o professor, evidenciando a necessidade de trabalhar colaborativamente a pares ou em pequenos grupos.

Para Brocardo (2001), um ambiente de trabalho cooperativo pode ajudar os alunos a progredirem, quer no desenvolvimento das suas capacidades quer na sua crescente autonomia, deixando de solicitar a ajuda da professora. Esta foi uma das conclusões a que esta autora chegou num estudo empírico que desenvolveu numa turma do 8.º ano de escolaridade. Nesse estudo, a autora pretendia perceber as características das actividades de investigação desenvolvida pelos alunos, a eventual relação entre as características individuais dos alunos e a evolução relativamente ao modo de explorar tarefas e quais as potencialidades desta experiência de trabalho ao nível da aprendizagem da Matemática.

A opinião dos investigadores referidos anteriormente é consensual quanto à importância da interacção social na aprendizagem da Matemática. Pois, ela permite trocar ideias, comparar estratégias e discutir argumentos quer com o professor, quer com os colegas (Wood *et al.* 1996). Mas, a criação de um ambiente em que esta partilha de pensamentos seja uma realidade na sala de aula, ainda é uma tarefa desafiadora para muitos professores.

A relação professor-aluno

As relações que se estabelecem entre o professor, os alunos e os conteúdos de aprendizagem determinam o que constitui a chave de todo o ensino, consistindo as actividades o meio através do qual a comunicação se estabelece na sala de aula.

Desde meados do séc. XX que se vem debatendo o grau de participação dos alunos no seu processo de aprendizagem. Por isso, a visão do ensino da Matemática hoje transmitida, é bem diferente daquela que se considera tradicional. Ao professor, de quem se esperava que transmitisse conhecimentos e controlasse os resultados obtidos pelos alunos, pede-se hoje que desempenhe um papel muito mais diversificado, com uma posição de intermediário entre o próprio aluno e o saber, muito ligado às questões da comunicação. Compete agora ao professor escolher actividades matemáticas capazes de motivar o interesse e as funções mentais dos alunos; organizar as actividades da sala de aula, que incluam a verbalização dos seus raciocínios; orientar os alunos na compreensão das ideias matemáticas enquanto comunicam esses mesmos raciocínios. Aos alunos, de quem se esperava que aprendessem passivamente e em silêncio, pede-se hoje que se envolvam activa e colaborativamente nas actividades matemáticas, onde aprendam Matemática, mas também aprendam a justificar as soluções encontradas (Yackel e Cobb, 1996)

Fazer Matemática não é mais um trabalho solitário. É antes uma linguagem que envolve resolução de problemas, comunicação e compreensão de conceitos.

É comunicando que as crianças aprendem. Para promover uma aprendizagem significativa, o professor deve encorajar os seus alunos a representar, falar e ouvir, escrever e ler. Por isso, é urgente mudar o tipo de comunicação unívoca que se tem estabelecido nas aulas de Matemática para o estabelecimento de comunidades discursivas, como, aliás vem sendo aconselhado desde os anos 80 (Romão, 1998). É pela atenção dada à interacção comunicativa que o professor obtém informações que o ajudam a tomar decisões acerca do ensino. Pois, sem comunicação não há ensino (Bishop e Goffree, 1986).

Comunicar exige ouvir atentamente os outros. A disponibilidade do professor ouvir pode melhorar a aprendizagem dos alunos na medida em que lhe demonstra o valor que atribui às suas contribuições e na confiança que deposita nas suas capacidades para pensarem e aprenderem por si. Os alunos preferem aprender com professores em quem confiam e em ambientes de interajuda e de liberdade para pensar e falar, sem medo de serem ridicularizados e punidos por errarem.

Por isso, é de importância extrema que o ambiente da sala de aula estimule e valorize o discurso matemático, incentivando as interacções entre os alunos e entre o professor e os alunos. Uma boa forma de o fazer pode ser, por exemplo, proporcionar uma aprendizagem cooperativa, em pequenos grupos. As discussões surgidas no grupo, acabam por ter efeitos positivos ao nível da compreensão de conceitos, da comunicação, da motivação dos alunos e da cooperação (Romão, 1998).

Ao aprender, o aluno vivencia uma série de emoções que vão desde o prazer ao medo ou desde a satisfação à aflição ou à decepção. O modo como o professor olha, os gestos que faz, a expressões faciais que revela, o tom de voz que utiliza ou mesmo as pausas que cria, podem ajudar os alunos a sentirem-se amados, valorizados e incentivados a partilhar.

A comunicação

A faculdade de comunicar o que sente, pensa ou conhece é própria do ser humano e a sua necessidade advém da dimensão social.

Quando afirmamos que o Homem comunica, podemos entender a palavra nos dois sentidos: "partilhar" e "transaccionar".

O termo *comunicar,* de origem latina, significa "dividir alguma coisa com alguém". Comunicar será neste sentido "pôr em comum", "partilhar", "conferenciar". Tem a mesma origem o termo *comunicação* e significa "acção de participar", "transmissão", "capacidade de entendimento entre as pessoas através do diálogo" (Diciopédia, 2005).

O modelo clássico proveniente da Teoria de Informação, entende por comunicação uma transmissão entre um emissor e um receptor, com recurso a um sistema de sinais. Isto pressupõe que o receptor, para além de possuir capacidades que lhe permitam interpretar a mensagem, partilhe o código com o emissor de modo a compreender, a atribuir significado e a adquirir a mensagem. Esta é veiculada através de um canal onde pode haver interferências indesejáveis (ruídos). O acto comunicativo acontece no âmbito de um determinado contexto e admite uma reacção do receptor que pode inclusivamente ser a rejeição dos conteúdos da mensagem ou da própria mensagem.

Assim sendo, comunicação pressupõe que algo passe do individual ao colectivo, embora não se esgote nesta noção, uma vez que é possível ao ser humano comunicar consigo mesmo. Mas, geralmente o conceito de comunicação aplica-se à troca de informação sobre a forma de mensagem. A partilha de experiências de emoções e sensações é considerado igualmente um acto comunicativo.

Menezes (1995) afirma que, "teoricamente, a eficácia da comunicação é medida pelo grau de aproximação entre a informação enviada e a que é recebida" (p. 36).

A comunicação é essencial à socialização, à aculturação e à formação do indivíduo. É comunicando - entenda-se trocando experiências com significado – que uma pessoa adquire consciência de si e dos outros e interioriza os comportamentos, os valores, as normas, os conhecimentos, (etc.) e os seus significados na sociedade e na cultura em que se insere.

Bitti e Zani (1997, p. 71) enfatizam que, "para haver troca de informações, sejam elas de que tipo forem, é obviamente necessário que a interacção entre os participantes se inicie e se mantenha". Nesse sentido, para haver comunicação entre dois ou mais intervenientes é preciso que os interlocutores permutem os seus papéis de ouvintes e de falantes. Esses autores salientam que uma das regras da comunicação e uma das características do diálogo humano é a capacidade de alternar a vez, quando se fala.

A comunicação na sala de aula

Quando falamos das questões da prática escolar, a problemática da comunicação ganha especial importância. Por comunicação entende-se aqui um processo social onde os intervenientes interagem, trocando informações, influenciando-se reciprocamente.

As interacções entre os intervenientes na sala de aula e o modo como esses intervenientes ou participantes partilham as formas como encaram os conceitos e processos matemáticos, os fazem evoluir e ajustar ao conhecimento caracterizado pelo currículo são dois aspectos, identificados na literatura, a considerar no estudo da comunicação na sala de aula (Ponte, Boavida, Graça e Abrantes, 1997; Ponte e Serrazina, 2000).

Daí que possamos afirmar que a comunicação matemática pode ser encarada de duas formas de todo inseparáveis por se complementarem, a saber: 1) comunicação como objectivo curricular, isto é, comunicação encarada como conhecimento e compreensão matemática a desenvolver; 2) comunicação como meio, ou seja, a comunicação como parte de uma metodologia de ensino (Lampert e Cobb, 2003).

Para os autores referidos estas duas perspectivas serão, com certeza, privilegiadas se encararmos a aprendizagem como uma aquisição de conhecimentos matemáticos por um lado e, por outro, como um processo em que o aluno se torna participante das práticas matemáticas. Isto é, a comunicação matemática está ao serviço da aquisição de conhecimentos, mas também é parte integrante dessa mesma aprendizagem.

De acordo com Bishop e Goffree (1986), "qualquer coisa que o ensino envolva, deve incluir claramente a comunicação, porque sem comunicação não há aprendizagem e sem aprendizagem não há ensino" (p. 330).

Deste modo, rapidamente se conclui que o desenvolvimento do conhecimento matemático ou do vocabulário do aluno, será tanto maior quanto mais oportunidades de comunicar na aula forem criadas. Nestas oportunidades devem estar incluídas situações diversas como falar, escrever, executar, observar, ler, argumentar, especular, provar, explicar, pensar e discutir (NCTM, 1991).

Na sala de aula, é aos alunos e ao professor que está atribuído o papel da comunicação. Sendo o professor o interveniente que normalmente influencia os alunos, pode, por vezes, dar-se o contrário. Assim, a comunicação na sala de aula depende do que cada interveniente transporta para a aula. São por um lado os conhecimentos prévios, as competências, os valores, as normas, os hábitos e expectativas dos alunos e, por outro, os conhecimentos do professor nos diferentes domínios que, a par dos materiais utilizados, do número de alunos por turma e da situação sócio-cultural dos alunos, interferem no decorrer das interacções na sala de aula.

É, contudo, ao professor que é atribuído um papel de relevo na aula de matemática. A forma como este comunica com os alunos influencia fortemente a qualidade das interacções entre os intervenientes. De facto, qualquer sala de aula abriga duas formas de interacção. Entre professor e alunos e dos alunos entre si. Tendo a tradição do ensino valorizado sempre mais a interacção entre o professor e os alunos. Neste contexto, inversamente ao desejável, o professor recorre às perguntas para controlar ou prevenir comportamentos indesejáveis, cabendo uma parte muito pequena de participação aos alunos. É o professor quem inicia e conclui habitualmente a comunicação, limitando o aluno a respostas curtas, salientando-se, assim, a autoridade do professor na sala de aula (Alro e Skovsmose, 2002).

A literatura (e. g. Bishop e Goffree, 1986; NCTM, 1994; Ponte e Serrazina, 2000; Yackel e Cobb, 1996) tem atribuído especial importância à comunicação por esta abranger amplamente os tipos de interacções e a negociação de significados a que conduz, num contexto tão específico como é a aula de matemática.

É principalmente através da linguagem oral que se desenvolve a comunicação na aula de Matemática. Ainda que ajudada por outros tipos de linguagem (escrita, pictórica/icónica, gestual/corporal), a linguagem oral permite interacções mais frequentes dos alunos entre si e com o professor. É através dela que eles expressam as suas ideias, dúvidas ou certezas, e as confrontam com os seus pares, regulados pelo professor (Ponte e Serrazina, 2000).

As interacções estabelecidas nestas aulas tanto podem ser orais como escritas ou gestuais. As primeiras têm sido predominantes, contudo, os registos escritos do que se experimentou têm um papel muito mais estruturante na aprendizagem da matemática. E, de novo, cabe aqui ao professor incentivar a produção dos registos escritos como forma do aluno poder exprimir as suas ideias, ouvindo as dos seus colegas e as do professor, formular e resolver problemas, comparar processos, defender conjecturas, compreender ideias e relações, reflectir e desenvolver o seu vocabulário matemático (NCTM, 1991; Ponte, Matos e Abrantes, 1998). É ainda através da comunicação escrita que os alunos clarificam, organizam e consolidam o seu pensamento, desenvolvendo o seu conhecimento matemático, a capacidade de resolver problemas, o poder de abstracção, a capacidade de raciocínio e uma maior confiança em si mesmo para alcançar uma compreensão mais profunda dos princípios e conceitos matemáticos (Baroody, 1993; Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado, 1998).

Segundo vários autores (e. g. Alro e Skovsmose, 2002; César 2000; Wood, Cobb e Yackel, 1993; Yackel e Cobb, 1996) interacções entre alunos, em trabalho de grupo, tornam as aulas mais ricas do que a aula organizada de uma forma tradicional. Este tipo de interacções dá aos alunos a oportunidade de discutirem as suas ideias com os colegas, estimulando-os a novas descobertas e à construção mais sólida do conhecimento. As crianças sentem-se mais à vontade quando falam em pequenos grupos; envolvidos num ambiente colaborativo a sua participação é mais espontânea e tornam útil o seu conhecimento ao combiná-lo com o de outros. Ao inverso, quando é necessário falar para toda a turma, acabam por se inibir, pois não têm a certeza das suas ideias ou opiniões e não querem desiludir o seu professor (Alro e Skovsmose, 2002).

Quando as crianças explicam e argumentam as suas construções pessoais e ouvem as dos colegas, podem existir discordâncias óbvias na sua interpretação individual. As tensões criadas entre os significados apresentados pelo professor ou pelos colegas revelam a necessidade de ajustar as suas interpretações através de um processo que envolve a partilha de ideias e pensamentos e de haver uma negociação para que os significados possam ser dados ou tomados como partilhados (Cobb, Yackel e Wood, 1993). Nesta perspectiva "ensino e aprendizagem é uma actividade reflexiva que envolve a negociação do significado matemático através de um processo na qual a obrigação de comunicar é uma expectativa mútua" (Wood *et al.* 1993, p. 66).

Curcio (1990), apresenta uma experiência que realizou com alunos dos primeiros anos de escolaridade, até ao 6.º ano, em que mostra como, ao seguir uma abordagem pela experiência, as crianças são capazes de expressar as suas ideias acerca dos conceitos da matemática, clarificando o seu pensamento e reflectindo sobre as ideias matemáticas que encontram. Ou seja, a linguagem natural usada pela criança quando vive as situações pode ajudar a estabelecer uma plataforma de entendimento entre a matemática do mundo real e a matemática escolar. Para esta autora, a comunicação das ideias matemáticas está relacionada com a experiência das crianças nos diferentes graus de ensino e, portanto, ouvir, falar ler, escrever ajuda as crianças a clarificar as suas ideias e a partilhá-la com os outros.

A comunicação é um processo, como tal é dinâmica e evolutiva, considerada, portanto, um aspecto essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática. Para Ponte e Serrazina (2000), "ela é ao mesmo tempo, um indicador sobre a natureza desse processo e uma condição necessária para o seu desenvolvimento" (p.118).

Considera-se a comunicação um aspecto muito importante para a construção do saber matemático, pois toda a construção do conhecimento é feita por interacção social através de interacções múltiplas, pressupondo troca no diálogo, na argumentação e no discurso (César, 1999).

Cabe, por isso, ao professor criar a possibilidade de estabelecer uma comunicação genuína entre os membros da comunidade de sala de aula, possibilitando assim a promoção para o desenvolvimento do conhecimento conceptual dos alunos, através do conhecimento partilhado naquela comunidade. Assim, quando se fala em comunicação na aula de Matemática, consideram-se aspectos como a organização da sala de aula e o papel das tarefas e dos materiais usados para promover a actividade dos alunos. Estes, intimamente relacionados com a natureza do discurso matemático que o professor valoriza, com o papel das suas acções e com os modelos de comunicação que se desenvolvem entre professor e alunos e entre alunos favorecem a criação de um ambiente interactivo na aprendizagem da Matemática (Romão, 1998).

A atitude do professor é decisiva para o desenvolvimento de uma atmosfera de confiança e respeito mútuo, que encoraje as crianças a falar sobre as suas experiências, observações, conjecturas ou estratégias de pensamento que conduzam a planos de solução. Ele sabe quando e como estimular um aluno a participar, quando e como aprofundar um conceito, quanto tempo deve deixar o aluno sozinho a tentar ultrapassar a sua dificuldade, quando e como deve ajudar o aluno, como deve estimular as interacções entre os intervenientes na aula ou que suportes/materiais deve usar para que os alunos participem activamente na aprendizagem. Enfim, um professor sabe que condições proporcionar aos alunos para o desenvolvimento favorável de um ambiente de trabalho participativo, onde a actividade matemática seja estimulante (Ponte e Serrazina, 2000).

Estes autores distinguem três modos fundamentais de comunicação entre dois ou mais intervenientes: a exposição, o questionamento e a discussão. Numa aula de Matemática vivem-se todos estes modos ou estilos de comunicação. No primeiro e no segundo modo, há apenas um interveniente que o concretiza e no terceiro há a participação de todos os intervenientes.

Na exposição, um dos intervenientes, normalmente o professor, expõe uma ideia, descreve factos ou sistematiza trabalhos e todos podem fazer perguntas para se esclarecerem.

No questionamento, um dos intervenientes, geralmente o professor, faz perguntas consecutivas com objectivos definidos: detectar dificuldades na compreensão dos conceitos e dos processos matemáticos, ajudar a raciocinar, incentivar a participação e verificar se o trabalho da aula está a ser acompanhado. Neste modo de comunicação, Ponte e Serrazina (2000) consideram três tipos de perguntas essenciais numa aula de Matemática: as de focalização, que ajudam o aluno a percorrer um determinado raciocínio até completar a tarefa; as de confirmação, que ajudam o aluno a verificar as respostas por si próprio; e as de inquirição, que esclarecem o professor acerca do modo de pensar do aluno (como resolveu determinado problema ou que opinião tem sobre um resultado ou estratégia). O uso equilibrado que o professor faz dos tipos de perguntas depende da sua visão de ensino e de aprendizagem e do que entende ser o seu papel e o do aluno.

A discussão, moderada pelo professor, tem como objectivo fomentar interacções entre todos os intervenientes da aula, de modo a definir-se a estratégia a seguir para a realização de uma tarefa, a discutir o balanço do trabalho ou a avaliação de uma solução. Com este modo de comunicação, espera-se que tanto professor como alunos desenvolvam cooperativamente as ideias e o pensamento matemático em público e que o envolvimento dos alunos na sua aprendizagem seja mais activo. Para tal, o professor deve explorar as sugestões dos alunos, ajudá-los a avaliar e a reflectir sobre as sugestões dos colegas, levantando dúvidas e implicações ou hipóteses. Deve encaminhar a comunicação de forma a que os alunos oiçam, respondam, comentem e usem argumentos matemáticos para determinar a validade de afirmações, convencendo e convencendo-se.

A linguagem escrita como veículo da comunicação, embora menos frequente que a oral, é considerada muito importante na aprendizagem e no ensino da Matemática. Ela é a expressão das ideias matemáticas e estrutura o pensamento dos alunos, permitindo, ao professor, perceber como é que os mesmos resolveram o problema, ou simplesmente perceber que dúvidas subsistem. Apesar de ainda ser pouco utilizada na aula de Matemática, é ela que permite às crianças mais tímidas descreverem as suas ideias a outros. É muito importante que as crianças, depois de resolverem um problema, escrevam a resposta sob a forma de frase. Podem ainda escrever sobre o que lhes pareceu mais fácil ou mais difícil numa dada aula e porquê; ou mesmo criar histórias sobre a matemática para que se tornem actividades de leitura a ser partilhadas com os colegas. A necessidade e a oportunidade de os alunos comunicarem matematicamente está incluída no próprio currículo de Matemática.

As crianças dos primeiros anos de escolaridade usam a representação para traduzir um problema, isto é, usam a representação como forma de comunicar ideias matemáticas e sentir-se encorajadas a centrar-se nas características essenciais do problema. Ao distinguir que uma representação pode descrever múltiplas situações, a criança, começa a compreender o poder da matemática e a constatar que algumas formas de representar um problema são mais úteis do que outras. Começa, então, a compreender a flexibilidade e a utilidade da matemática (NCTM, 1991).

Ao discutirem a resolução de problemas, umas com as outras, as crianças estão a relacionar a linguagem que conhecem com os termos matemáticos, passando os problemas a ter sentido para elas.

Se uma criança fala ou escreve acerca da matemática e a sua resposta parecer incorrecta, isso, de facto, pode ser uma deficiência de comunicação. Os alunos que vivem num ambiente onde a comunicação entre os pares é frequente e valorizada, aprendem a comunicar matematicamente de forma natural.

Ambiente de aprendizagem

O professor é um dos intervenientes no processo educativo que mais pode influenciar a aprendizagem dos alunos. O modo como actua, dirige e controla toda a dinâmica da sala de aula, tem repercussões no desenvolvimento da comunicação entre os alunos e entre ele próprio e os alunos. A sua atitude é de extrema importância no desenvolvimento de um clima relacional de confiança e respeito mútuo na sala de aula, que oferece aos alunos a oportunidade de construírem a sua própria aprendizagem.

Lindquist e Elliott (1996) referem a necessidade de o professor ser capaz de saber ouvir tudo o que os alunos têm para dizer, promovendo um ambiente de sala de aula facilitador da expressão de todas as questões sem constrangimentos. Essa atitude do professor pode melhorar a aprendizagem dos alunos. Ao ouvir activamente, demonstra o valor que atribui às intervenções e contribuições dos alunos e ajuda a criar um ambiente em que os alunos aceitam as afirmações uns dos outros, sem considerar o professor como fonte de sabedoria (Pirie, 1996). Esta autora salienta que "a comunicação precisa tanto de um ouvinte como de um falador" e que "a comunicação matemática só existe efectivamente se todos os participantes estiverem preparados para os dois papéis, ouvir activamente tanto quanto falar" (p. 105).

Neste sentido, o professor actua como facilitador do pensamento e da aprendizagem dos alunos, proporcionando-lhes a oportunidade de se implicarem em diálogos, interagindo com os colegas e com ele mesmo, expressando as suas ideias e construções matemáticas.

Integrados neste tipo de ambiente e no contexto da resolução de problemas, os alunos discutem, ouvem e negoceiam as suas ideias matemáticas com os colegas e com o professor, individualmente, em pequenos grupos e no contexto de toda a turma, uma vez que existe a necessidade constante de os alunos comunicarem com e sobre a matemática (Schoen, Bean e Ziebarth, 1996).

O ensino da matemática está hoje, mais do que nunca, ligado com as questões da comunicação. Comunicação esta que deve ser feita em todos os sentidos e não num único só. Actualmente, o papel do professor não é mais o de transmissor de conhecimentos e o do aluno não é mais o de mero ouvinte, solitário e passivo (César, 1999). Espera-se que todos se envolvam na aprendizagem e construção de saberes. Mas, usar tarefas matemáticas interessantes ou reconhecer a comunicação como um aspecto crucial no ensino da matemática pode, por si só, não garantir uma prática pedagógica que estimula os alunos a pensar e a raciocinar e que cria oportunidades para que comuniquem esses pensamentos e esses raciocínios.

É preciso que o professor promova uma atmosfera de confiança e respeito mútuo, conseguindo fazer com que os alunos trabalhem colaborativamente em pequenos grupos em tarefas que conduzam à argumentação e justificação de soluções.

É na sala de aula, esse contexto social e cultural de aprendizagem matemática, que os alunos aprendem a partilhar ideias e pensamentos como aprendem também a negociar os significados com o professor numa verdadeira construção do conhecimento matemático (Romão, 1998).

A sala de aula compreende um misto de acontecimentos significativos, lembrados e partilhados pelos alunos que dela fazem parte, quer pelos momentos de prazer ou de crise que proporcionam. Isto é, cada sala de aula tem a sua própria história e os alunos que as frequentam são as suas personagens principais. Cada um deles criou uma imagem dos colegas, do professor, das tarefas, dos acontecimentos e dos conteúdos matemáticos que nela ocorrem (Bishop e Goffree, 1986).

Quando os alunos se exprimem acerca das suas construções pessoais e ouvem as dos outros colegas, confirmam e conciliam as suas interpretações através de um processo que se chama negociação de significados (Ponte e Serrazina, 2000).

Ao confrontarem os seus significados com os dos colegas e com os do professor, existe a necessidade de haver uma negociação para estabelecimento e partilha desses mesmos significados. É o modo como o professor e seus alunos discutem as bases para a actividade matemática que origina a autêntica comunicação e, ao mesmo tempo, a oportunidade de os alunos aprenderem, pois, é o professor que, através da partilha de conhecimentos matemáticos dentro da sala de aula, detém a responsabilidade de promover o desenvolvimento conceptual dos alunos pela via da comunicação matemática (Cobb *et al.*, 1993).

Bishop e Goffree (1986), consideram que para haver uma genuína negociação de significados, o professor deve, em primeiro lugar, começar por criar condições na sala de aula para o estabelecimento de regras que tornem possível a existência de uma atmosfera de respeito mútuo que permita uma negociação bem sucedida. Em segundo lugar, o professor deve ter em conta que, para além de dar a conhecer as suas ideias, questionar, justificar, explicar e dar exemplos, ele deve também, de um modo simétrico, estimular os alunos a falar e a contribuir com frequência, expondo as suas ideias, perguntando quando não entendem, objectando e apresentando razões para as suas afirmações. E, por fim, o objectivo do professor deverá ser o desenvolvimento da partilha de significados que inclui a clarificação do que se compreendeu mal e a formação de uma linguagem matemática, encorajando raciocínios estimulantes.

A ideia de comunicação defendida pelo NCTM (1991) é incompatível com a de actividades de um só sentido. Como refere Veia (1996, p. 26), "tal como a prática da ciência matemática a aprendizagem da disciplina de Matemática é também uma actividade social". Numa lição expositiva não existe partilha de significados, as intervenções dos alunos limitam-se a dar respostas curtas a perguntas colocadas pelo professor e raramente são convidados a explicitarem as suas ideias, partilhando-as com o professor e com os colegas.

Em pequenos grupos, os alunos discutem e resolvem problemas, relacionam os termos matemáticos envolvidos, passando os problemas a ter sentido para eles (Veia, 1996).

Grande parte dos alunos não consegue verbalizar as suas ideias, na sala de aula, com receio de julgamentos por parte do professor e dos colegas. Por isso, ao criar uma atmosfera de confiança e respeito recíproco entre todos, o professor está também a proporcionar aos alunos condições favoráveis à exposição de ideias e, simultaneamente a incentivar a utilização da terminologia adequada (Yackel e Cobb, 1996).

De acordo com Veia (1996), os alunos que desenvolvem a sua linguagem matemática estão também a desenvolver a sua capacidade de resolver problemas. Por sua vez, a resolução de problemas em grupo constitui a actividade que, por excelência, será capaz de proporcionar o desenvolvimento das capacidades de comunicação, mediados que são pela atenção do professor. Neste contexto, ao professor cabe o papel de moderador por um lado, ouvindo as explicações e interpretações dos alunos e de provocador de interacções por outro, colocando-lhes questões que poderão conduzir os alunos a reflectir e argumentar sobre os seus pensamentos matemáticos.

Whitin (2004) defende que quando se colocam questões aos alunos, durante a resolução dos problemas, pode enfraquecer-se a dicotomia entre professor e aluno, construindo-se, assim, um ambiente promotor do pensamento e da imaginação de todos os alunos. Este autor apresenta três situações em que os alunos demonstraram uma forte disposição para responderem a questões colocadas pelo professor, mesmo quando não têm respostas imediatas. O professor apenas encorajou os alunos a apresentar as suas hipóteses através do uso da palavra "se" e estes, como resposta, acolheram os desafios, acreditaram que eram capazes e partiram para a exploração. É ainda de salientar que quando o professor alarga o debate a toda a turma, deve manter o papel de moderador, mostrando a sua disponibilidade para ouvir e respeitar as ideias dos alunos, ajudando-os a verbalizarem os seus significados, clarificando e resumindo o que encontraram. O professor não tem que conduzir o debate segundo a sua perspectiva, ele tem sobretudo que tornar mais fácil o processo da comunicação, estabelecendo regras de funcionamento e incentivando os alunos a pensar sobre as suas ideias e as dos colegas.

É nesse sentido que Whitin (2004) refere que o questionamento feito pelo professor, tem um efeito positivo nas normas do ambiente na sala de aula. Este autor acredita que, assim, os alunos são capazes de desenvolver um espírito intelectual curioso que lhes permite explorar caminhos nunca antes percorridos, responsabilizando-se pela exploração desses caminhos, ou seja pela sua própria aprendizagem.

Yackel e Cobb (1996) referem igualmente a necessidade de se estabelecerem normas sociais para a discussão na sala de aula aplicadas a qualquer área do saber. Como parte integrante da negociação do significado matemático, utilizam um termo específico para as normas específicas relativas à construção do conhecimento matemático na aula de matemática: normas sociomatemáticas. A explicação, justificação ou argumentação matematicamente aceitáveis, a eficácia matemática, a elegância e sofisticação matemáticas bem como aquilo que se pode considerar matematicamente diferente, surgem como exemplos de normas sociomatemáticas. Segundo os mesmos autores, estas normas devem ser construídas e renegociadas no contexto social em que os alunos pretendem comunicar o seu significado matemático, em ambiente de interacção.

Curcio (1990) refere a importância de se trabalhar em ambiente experimental porque isso pode ajudar na aprendizagem dos significados.

As crianças crescem em comunidade e a aprendizagem acontece durante as interacções sociais através da explicação, justificação e negociação de significados que os diálogos proporcionam. Entende-se por isso que o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática se baseia numa perspectiva construtivista da aprendizagem em que o conhecimento é activamente construído pelas crianças nesse processo social que é a aprendizagem. As crianças necessitam das suas construções matemáticas baseadas nas suas experiências pessoais à medida que vão interpretando activamente as situações e tentando atingir o seu propósito na sala de aula (Cobb *et al.* 1993).

Assim sendo e, para que o genuíno ambiente de aprendizagem se possa gerar, o ensino da matemática não pode ser baseado em actividades rotineiras. Cabe ao professor reflectir sobre o tipo de actividades a realizar com os alunos e adoptar uma atitude compatível com esta perspectiva de aprendizagem em que o significado matemático é negociado entre todos os elementos da turma.

O papel do professor

Polya (2003, p. 23) sublinha que "uma das tarefas mais importantes do professor é a de ajudar os seus alunos", salientando que esse apoio deve ser doseado, de modo que não seja de mais nem de menos para que ao aluno caiba uma boa parcela de trabalho.

A dificuldade do professor está em saber em que medida deve apoiar a actividade dos alunos e que tempo deve atribuir à realização dos trabalhos que propõe.

A análise do artigo de Yackel e Cobb (1996) mostra-nos que o professor tem um papel fundamental na criação e manutenção de um ambiente de sala de aula com qualidade matemática, assim como "...no estabelecimento de normas para aspectos matemáticos da actividade dos alunos. Isto realça o significado das próprias crenças e valores matemáticos pessoais do professor e o seu próprio conhecimento e compreensão matemática" (p. 23).

Como representante que é da comunidade matemática, o professor deve ter um papel activo e crítico, permitindo e incentivando os alunos a irem mais além do que o que é dado, de maneira a olharem para o problema a partir de diferentes perspectivas, incentivando as crianças a encontrarem outros exemplos para ampliarem as suas descobertas iniciais (Whitin, 2004).

Margarida César (1999), ao analisar os resultados do trabalho do Projecto *Interacção e Conhecimento*, concluiu que o papel do professor mudou, se o compararmos com o papel tradicional. O professor passou a ser um questionador mais atento, que orienta os alunos e os leva a reflectirem nas questões que lança e sobre as suas estratégias de resolução.

Podemos então afirmar que o professor é o elemento chave na criação do ambiente que se vive na sala de aula. Para além de agente facilitador das aprendizagens dos seus alunos, devendo criar as melhores condições para que eles aprendam, cabe-lhe a responsabilidade de seleccionar, organizar e criar propostas de trabalho para os alunos e de coordenar o desenrolar da sua actividade.

Ponte (2003), analisou a investigação de Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira e Oliveira (1999), acerca do papel do professor na condução de investigações matemáticas. Nesse estudo, estes autores distinguiram dois processos de raciocínio didáctico: (i) a recolha de informação na qual o professor avalia a situação do trabalho e (ii) a promoção da aprendizagem que se desenvolve a partir de três acções distintas – explicar, apoiar e sintetizar. Estes autores salientaram que a acção do professor pode decorrer em três modos relacionados com os papéis dos alunos. A saber: a) modo afirmativo, quando o professor faz uma afirmação ou torna mais clara a afirmação anterior, explica conceitos ou procedimentos, validando as afirmações dos alunos; b)modo interrogativo, quando pede explicações, questiona de forma específica, questiona de forma aberta ou solicita justificações; c) modo de gestão, quando gere toda a situação didáctica.

Daqui se depreende que o papel do professor e o do aluno se influenciam mutuamente. Ou seja, se o professor assume um modo ou uma atitude interrogativa vai permitir que o aluno intervenha mais; se os alunos apresentam ideias confusas, cabe ao professor clarificá-las e não apenas gerir a situação de ensino aprendizagem (Brocardo, 2001).

Vários autores (e. g. Ponte 1993; Ponte 1994) têm analisado as dificuldades que os professores sentem quando tentam implementar ideias inovadoras sobre o ensino da Matemática, na sua prática lectiva. Nuns casos os professores interpretam as intenções originais, mas não conseguem efectuar mudanças significativas na sua prática. Noutros casos, sentem falta de um apoio pedagógico por parte de colegas de profissão ou das escolas de formação (Veia, 1996).

No estudo de Vieira (1997), cujo objectivo era o de descrever e analisar os saberes que as três professoras do 1.º ciclo sustentavam na sua acção profissional como docentes de Matemática, as professoras revelaram um grande empenho no seu trabalho e um saber pedagógico de acordo, em muitos aspectos, com as orientações curriculares actuais, no entanto, manifestaram dificuldades em concretizar algumas dessas orientações, nas suas práticas lectivas, "nomeadamente, as que têm a ver com uma natureza aberta e problemática das tarefas e com o papel da interacção na aprendizagem da Matemática" (p. 289).

Assim, e de acordo com Saraiva e Bernardes (1998), "as tarefas que o professor propõe aos seus alunos assumem um papel importantíssimo, pois delas dependerá bastante a actividade matemática desenvolvida por eles" (p. 136). Para além dessa condição, sem dúvida necessária, a uma boa actividade matemática do aluno, há que ter também em conta a importância do ambiente de trabalho que o professor cria e mantém na sala de aula e a interacção aluno-aluno e aluno-professor como peças fundamentais da criação do significado matemático.

Também Bishop e Goffree (1986) salientam a importância da escolha da tarefa, por parte do professor, assim como da sua capacidade em criar um ambiente envolvente e em gerir as actividades com sucesso.

Este é um trabalho complexo que exige que o professor esteja atento aos mais diversos aspectos da aprendizagem dos alunos, uma vez que esse é "... um processo que requer o envolvimento dos alunos em actividades significativas e que é fortemente influenciado pela cultura da sala de aula..." (Abrantes *et al.*, 1999, p. 28).

Nesse sentido, o professor deverá realizar um adequado planeamento do seu trabalho, estabelecendo objectivos, tendo em conta a experiência e os conhecimentos prévios dos alunos, construir situações de aprendizagem diversificadas, organizando reflexões e discussões sobre esses conhecimentos e essas experiências, numa verdadeira atmosfera de aprendizagem, incentivando as crianças a encontrarem outros exemplos para ampliarem as suas descobertas iniciais, desenvolvendo a capacidade reflexiva dos alunos, mas promovendo o trabalho autónomo (Whitin, 2004). Deste modo, apenas aparentemente o papel do professor é menos relevante na sala de aula, porque na realidade ele tornou-se foi muito mais complexo e multifacetado (César, 1999).

O NCTM (1994) apresenta três áreas nas quais os professores podem basear as propostas de actividades que fazem aos seus alunos: o conteúdo matemático, os alunos e as suas formas de aprender matemática.

Ganha, assim, especial relevo o conhecimento profissional do professor no âmbito do saber em acção, nomeadamente no da criação de situações que assegurem a aprendizagem pretendida.

Manter-se actualizado e colaborar nas trocas de experiências com os seus pares, participando em encontros e acções de formação deve ser também outra responsabilidade do professor.

Assim, conforme os objectivos que queira alcançar, o professor decide a forma de organizar o trabalho dos alunos. Tudo depende do seu estilo pessoal, das características da turma e das necessidades individuais de cada aluno.

Modos de trabalhar na sala de aula

Na sua prática pedagógica, o professor deve optar por situações de aprendizagem diversificadas que desenvolvam a comunicação dos alunos, nomeadamente em trabalho individual, em pequenos grupos ou mesmo em trabalho colectivo (APM, 1988; APM, 1998; Ponte e Serrazina 2000). Adicionalmente, o professor deve atender ao facto de que "uma das condições essenciais para o êxito da aprendizagem em Matemática é a procura de um justo equilíbrio entre estes três tipos de organização do trabalho escolar" (APM, 1988, p. 66).

O trabalho individual desempenha um papel importante na aula de Matemática, uma vez que permite aos alunos desenvolverem certas aptidões como as que necessita para ler e escrever matemática ou para criar hábitos de reflexão (APM, 1988). Além disso, é uma maneira de os alunos perceberem a sua autonomia e responsabilidade pela sua aprendizagem, sabendo que dispõem do apoio directo do professor sempre que dele necessitarem (Ponte e Serrazina, 2000).

Ao trabalho em pequenos grupos deve ser dada uma atenção especial visto ser considerado uma via para encorajar o desenvolvimento das relações matemáticas, do raciocínio e da comunicação dos alunos e um modo de os envolver em actividades matemáticas significativas (Yackel, Coob e Wood, 1993). O trabalho de grupo é, assim, uma forma de conjugar as interacções entre os alunos e o seu envolvimento activo na aprendizagem.

Yackel et al (1993), contam que numa investigação que desenvolveram com alunos dos primeiros anos a trabalhar em pequenos grupos, observaram que as crianças não conseguiram trabalhar colaborativamente, seguiram estratégias diversas e não tentaram sequer, chegar a consenso. Estes autores consideram importante compreender estas situações, porque elas podem não ser meras violações das normas sociais negociadas e estabelecidas na sala de aula, mas estarem relacionadas com a concepção matemática dos alunos.

Para Artzt (1996) o contexto de pequeno grupo tem a faculdade de proporcionar um ambiente natural no qual o diálogo e a comunicação acerca da matemática podem aumentar. Segundo Bishop e Goffree (1986), embora o professor continue a supervisionar o trabalho dos alunos quando estes trabalham em pequenos grupos, uma grande parte da aprendizagem vai ter lugar sem a sua orientação directa, passando a sofrer influência da discussão de grupo. Em sua opinião, são essas discussões que permitem articular as estratégias de solução e revelar os erros na compreensão dos alunos. O trabalho em pequenos grupos parece mostrar-se particularmente adequado quando se pretende enfatizar a comunicação e discussão entre os alunos "uma vez que a comunicação que os alunos encontram nos seus grupos de aprendizagem cooperativa torna-se a comunicação que eles têm consigo próprios quando trabalham sozinhos" (Artzt, 1996, p. 124).

Esta mesma autora refere que há investigação que propõe que, para haver resultados positivos, as actividades dos pequenos grupos devem ser bem estruturadas para maximizar a oportunidade que os alunos têm de colocar questões, de verbalizar as suas ideias, e de poder dar e receber *feedback* dentro do grupo. Quando as actividades não são estruturadas, ou seja, quando apenas é pedido aos alunos para trabalharem em conjunto com os colegas do seu grupo para resolverem um problema, completarem um qualquer trabalho ou ajudarem-se uns aos outros, conforme precisem, a comunicação entre eles pode tomar muitas formas. Os alunos podem somente partilhar respostas, fazer os trabalhos uns dos outros ou ajudar-se reciprocamente. As possíveis formas de comunicação, se forem alinhadamente representadas, vão desde alunos que trabalham independentemente, sem comunicar uns com os outros, ainda que sentados em grupo, a alunos que comunicam entre si na resolução de um problema. Entre esses dois extremos existem outras possibilidades de formas de comunicação como seja a de um aluno que domina a comunicação no grupo e a combinação das duas primeiras em que há alunos que trabalham e comunicam entre si enquanto outros trabalham individualmente dentro do mesmo grupo. Para a autora, as mais bem sucedidas estratégias de formação dos grupos, são as que são cuidadosamente estruturadas de modo a promover a interdependência positiva entre os seus membros e onde cada elemento seja individualmente responsável pelo trabalho feito no grupo.

Estes resultados podem ser melhor conseguidos através de um planeamento de tarefas e de estímulos adequados. De acordo com Artzt (1996), existem muitas razões para que os alunos desejem trabalhar em conjunto, mas as mais importantes são as procedentes da motivação intrínseca de cada um. Depois, o professor encarregar-se-á de criar diferentes estímulos e prémios, como sorrisos ou elogios e outras adequadas atitudes de relações interpessoais positivas que promovam a consolidação da cooperação entre os membros do grupo.

Brocardo (2001), desenvolveu um estudo empírico, que tinha como objectivo avaliar os efeitos de um projecto de desenvolvimento curricular conduzido numa turma do 8.º ano de escolaridade, analisando de um modo detalhado a evolução da turma e de três alunos. De entre outros objectivos, esta autora pretendia perceber qual tinha sido a evolução dos alunos relativamente ao modo de explorar tarefas investigativas e quais as potencialidades desta experiência de trabalho ao nível da aprendizagem da Matemática. Uma das conclusões desta investigadora é a de que "o trabalho em pequenos grupos foi fundamental para a evolução de cada um destes alunos ao nível da exploração de tarefas de investigação" (p. 552), havendo um aluno que, de uma atitude altamente individualista, passou a valorizar as sugestões das colegas reconhecendo que a discussão de ideias era fundamental para realizar um trabalho de maior qualidade.

Segundo Bishop e Goffree (1986), uma das tarefas do professor é maximizar os benefícios da realização da actividade em pequenos grupos, ajudando, encorajando, colaborando e estimulando a comparação e o contraste de ideias e arbitrar as competições entre os membros do grupo. Outra, é minimizar as possíveis desvantagens de trabalhar em grupo, momeadamente evitar o domínio de um dos elementos sobre os outros. Para estes autores, a liderança é sempre boa e talvez deva ser estimulada, mas a liderança continuada de um aluno pode ser um factor desencorajador para os outros. Nesse caso, o professor deve encontrar maneira de tornar os líderes rotativos ou colocá-los no mesmo grupo mantendo-os cientes do seu comportamento, encorajando-os a modificarem a sua atitude. Outro aspecto a que o professor deve ser sensível e tomar uma atitude preventiva ou "curativa" da acção é quando um aluno mais lento ou com mais dificuldades não conseguir beneficiar da ajuda de um outro mais rápido e melhor preparado se este lhe fizer aumentar a sensação de incompetência matemática, vindo o primeiro a desistir de cooperar, limitando-se simplesmente a copiar o que o outro faz.

Outra função do professor é decidir quando deve interromper o trabalho dos grupos para promover uma discussão com toda a turma, ou mudar de actividade. Para isso,

> "deve avaliar quando é que os benefícios do trabalho de grupo são ultrapassados pela necessidade de mudar para um formato de trabalho com toda a turma (talvez para exercer um maior controlo sobre a turma) ou de encorajar mais trabalho individual (talvez por os grupos terem atingido a fase de escrever as resoluções dos problemas ou os relatórios dos trabalhos práticos). Transições mais suaves entre as actividades parecem ser características dos professores mais eficazes". (Bishop e Goffree, 1986, pp. 327-328)

As discussões com toda a turma permitem aos alunos expressar as suas construções matemáticas individuais e relacioná-las com os significados emergentes, à medida que os interpretam através de um processo de negociação de significados (Wood *et al.*, 1993).

Apesar da importância que atribuem ao trabalho em pequenos grupos, Bishop e Goffree (1986), consideram que a actividade com toda a turma é a vida da sala de aula, pois, ainda que o professor organize o trabalho em pequenos grupos, essa, apenas é mais uma forma de organizar o trabalho com a turma. As explicações dadas pelo professor ou as discussões por ele promovidas são uma boa oportunidade para sintetizar, criticar e resumir estratégias que sejam produto de um trabalho colectivo.

O trabalho em colectivo com toda a turma é essencial nas aulas de Matemática, pois, é desse modo que o professor apresenta as novas tarefas e faz a discussão, com a turma, de tarefas já concluídas. Este modo de trabalho pode servir também para resolver um problema ou conduzir em conjunto uma investigação matemática com a participação de todos os alunos. A desvantagem deste modo de trabalhar é que não desenvolve nos alunos nem a competência nem a capacidade para trabalhar individualmente ou de saber interagir com os colegas num grupo cooperativo de aprendizagem (Ponte e Serrazina, 2000).

Nestes termos, o valor educativo dos diversos modos de organização do trabalho dos alunos na sala de aula depende, essencialmente, do modo como o professor conduz as actividades e gere o ambiente de aprendizagem, como afirmam Ponte e Serrazina (2000):

> "Há trabalho colectivo desafiante e repetitivo, trabalho de grupo estimulante e rotineiro, assim como trabalho em pares e individual produtivo e improdutivo. Tudo depende das tarefas propostas aos alunos, serem ou não adequadas ao modo de trabalho estabelecido e também do modo como o professor acompanha sua realização e vai gerindo o ambiente de aprendizagem". (p. 129)

Assim, o que é sempre determinante é o papel do professor e a forma como ele conduz o processo de ensino e aprendizagem dos seus alunos.

A resolução de problemas

A resolução de problemas no 1.º Ciclo

Estamos constantemente a resolver problemas, ainda que não intencionalmente. Faz parte da nossa vida diária controlar o vencimento, escolher o itinerário para ir de férias, escolher o melhor caminho para o emprego, etc. O nosso dia a dia está repleto de problemas que, na sua resolução, implicam o uso da Matemática. Muitos dos que se julgam maus alunos na Matemática, e da qual dizem querer distância, aplicam-na nestas situações de forma exemplar. Afinal são melhores alunos do que pensavam. Desse modo,

> a tarefa principal que se impõe aos professores é conseguir que as crianças desde cedo aprendam a gostar de Matemática. [...] Só assim esta disciplina deixará de ser factor de selecção para se tornar num instrumento de desenvolvimento de todos os alunos. (DEB, 2002, p. 169)

Hoje, mais do que nunca, é evidenciada a importância do aluno construir o seu conhecimento, na aquisição de competências matemáticas; esta é também uma das linhas orientadoras do programa de Matemática.

A atitude do professor, quer do ponto de vista humano, ético, pedagógico e científico influenciará o sucesso educativo de todos os que em conjunto zelam por tal (próprio professor, aluno, classe, escola, sociedade, comunidade educativa, sociedade). É necessário que, para isso, haja uma conjugação de esforços no seio dos professores, partilhando fontes de informação e de formação e documentos de reflexão. Esta atitude face às práticas matemáticas visa, sem dúvida, o sucesso integral e harmonioso do aluno.

Ao estabelecer o seu plano de trabalho anual, o professor deve escolher o conjunto de actividades que envolvam "as fases de desenvolvimento do programa correspondentes aos níveis diversos de aprendizagem dos seus alunos" (DEB, 2002, p. 34).

O Currículo de Matemática para o 1.º Ciclo enuncia oito objectivos gerais que devem orientar o professor nos procedimentos e atitudes, necessários à construção do saber matemático, a ter perante a disciplina. Deste modo, o programa sugere orientações, dando resposta a uma questão que todos nós um dia colocamos e que é: qual é o lugar da resolução de problemas no ensino da Matemática, no 1.º CEB?

Como resposta directa o mesmo documento refere que a resolução de problemas deverá constituir a actividade fundamental da Matemática a ser considerada no desenvolvimento de cada um dos seus capítulos. Isto requer do professor a mobilização dos meios e a criação de um ambiente de aprendizagem matemática cada vez mais dinâmico e desafiador.

Decerto que concordamos com a afirmação de que a Matemática só se tornará aliciante se for feita pelas próprias crianças, apelando à sua actividade, ao seu questionamento e à sua imaginação.

São por isso apontadas, no programa, três finalidades do ensino da Matemática para os três ciclos do Ensino Básico: desenvolver a capacidade de raciocínio, desenvolver a capacidade de comunicação, desenvolver a capacidade de resolver problemas. Os três blocos de conteúdos e uma componente de suportes de aprendizagem, que constituem o programa, desenvolvem-se a partir de uma actividade fundamental: a resolução de problemas. Estas orientações sugerem ainda que "esta organização não deve ser entendida como uma proposta de trabalho compartimentada e sequênciada no tempo. (...) Os tópicos de cada bloco devem ser abordados de forma integrada ao longo do ano" (DEB, 2002, p. 169).

A resolução de problemas é, assim, considerada um objectivo primordial do ensino da Matemática, tornando-se no processo que atravessa todo o programa, no qual os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas, e que deverá constituir a actividade central a partir da qual se promove o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação, fazendo a ponte entre o real e as abstracções matemáticas (DEB, 2002).

Ou, seguindo o conselho do NCTM (1991, p. 171) a resolução de problemas deve ser "o foco central do currículo de Matemática". Esta recomendação é feita a todos os graus de ensino, surgindo, assim, a primeira Norma para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar: A Matemática como resolução de problemas. Segundo esta associação, a resolução de problemas faz com que a criança se torne participante activa na sua aprendizagem impelindo-a a utilizar as aquisições feitas e a testar a sua eficácia. A resolução de problemas, portanto, é vista como tendo um papel de primeiro plano no ensino da Matemática. Este princípio enfatiza a ideia do professor como orientador, moderador, e propiciador de um ambiente de aprendizagem capaz de incentivar os alunos a questionarem, a explorarem e a experimentarem a abordagem dos problemas de uma forma diferente da proposta pelos manuais, no sentido dos alunos partilharem os seus raciocínios bem como as diferentes formas de o expressarem ou de o representarem, aprendendo a valorizar os processos e não só as soluções.

O ensino da matemática baseado na resolução de problemas é uma ideia que tem saído fortalecida, nos últimos anos. A justificá-la, estão as conclusões da crescente investigação em Educação Matemática, bem como o impacto social do desenvolvimento da tecnologia que coloca cada vez mais desafios ao professor, aos alunos e aos investigadores.

A publicação da obra *How to Solve It* de George Polya, em 1945, marca o início do interesse relativamente à resolução de problemas por parte dos educadores matemáticos.

A resolução de problemas e clarificação de conceitos

As orientações curriculares da disciplina de Matemática vigentes, particularmente as do 1.º ciclo do ensino básico, estabelecem objectivos orientados para a formação de cidadãos socialmente activos, aptos a solucionarem os problemas que enfrentam no seu quotidiano. Daí que a resolução de problemas surja como a actividade fundamental da Matemática, constituindo o eixo organizador do foco de ensino e das experiências de aprendizagem. Desenvolver a capacidade de resolução de problemas nos alunos, é, por isso, considerada uma das finalidades importantes do ensino da Matemática.

Se se aprende a resolver problemas resolvendo problemas (Polya, 2003), nesse caso é necessário colocar os alunos a resolver problemas.

Se bem que nos anos quarenta George Polya tivesse já enfatizado a importância da resolução de problemas no ensino da Matemática, esta recomendação só foi oficialmente tomada após 1975, decorrendo das preocupações mencionadas no relatório de NACOME. Este relatório defendia que as aulas de Matemática deveriam considerar seriamente actividades que se dirigissem para níveis cognitivos mais elevados dos alunos, e que a resolução de problemas deveria aparecer em todos os níveis de ensino, sempre relacionadas com situações reais.

A partir dos anos oitenta, a resolução de problemas passou, então, a ser apontada como eixo programático do ensino da Matemática em vários documentos (e.g., APM, 1988; Cockcroft, 1982; NCTM, 1991, 1994, 1998, 2000). Ainda hoje, a resolução de problemas continua a ser apontada, pelo NCTM, como uma das dez normas do ensino da Matemática para cada um dos níveis de escolaridade.

Na aula de matemática os professores propõem tarefas de natureza muito diversa: exercícios, problemas, investigações ou actividades investigativas e explorações (Ponte, 2004). Porém, se o objectivo é que os alunos se mostrem activos e construam a sua própria aprendizagem na resolução de problemas é importante distinguir as tarefas proporcionadas nessas aulas. Todavia, a grande variedade de tarefas que podem ser apresentadas na resolução de problemas, tornaram este conceito de certa forma desconfortante para os professores. Pois, um pouco por todo o mundo, a crescente valorização do papel da resolução de problemas na educação matemática, é acompanhada de um alargamento de perspectivas sobre o que é um exercício, um problema e uma investigação matemática ou actividade investigativa.

Exercícios e problemas

Ao longo de toda a nossa vida somos confrontados com inúmeros problemas, quer eles sejam nossos, quer nos sejam apresentados por outros. O termo "problema" é, inevitavelmente desta maneira, introduzido no nosso contexto familiar enquanto crianças, tanto através da família como da convivência social.

Da experiência vivida, percebe-se que uns são mais facilmente resolúveis do que outros, concluindo-se que um problema é uma situação perante a qual o indivíduo tem necessidade de parar para pensar, na tentativa de encontrar uma ou mais soluções para a resolver, muito embora não conheça, à partida, uma estratégia adequada para a sua resolução. Isto quer dizer que a resolução desse problema não é automaticamente consequente dos dados apresentados e que não existe à partida uma técnica que nos oriente à solução do mesmo. Assim é o problema matemático: situação para a qual o indivíduo sente necessidade de encontrar uma resposta, muito embora não conheça, à partida, uma estratégia adequada para a sua resolução. Contudo, torna-se difícil arranjar uma definição completa devido ao seu cariz subjectivo.

Para Kantowski (1980, p.195), "um problema é uma situação para a qual o indivíduo que o confronta não tem algoritmo que garanta a sua solução". Abrantes (1988) considera que esta definição mostra o carácter relativo da noção de problema, afirmando que o valor educativo dos exercícios, não sendo nulo, é limitado à prática da utilização de uma ou várias regras antecipadamente conhecidas. Refere ainda que muitas vezes se estabelece que o enunciado de um exercício contém somente números e operações, enquanto que o de um problema contém alguma referência a algum contexto concreto, mas que esta distinção pode ser enganadora.

Polya (2003), considera um problema como sendo uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, ao contrário do exercício que pode ser resolvido usando um método ou algoritmo já conhecido. Os exercícios, refere ainda, têm vários graus ou níveis de dificuldade, podendo requerer a aplicação de vários métodos. Os problemas também podem ter um grau de dificuldade maior ou menor, dependendo do sujeito a quem se destinam.

Ponte (2003, p.19), cita Abrantes e Ponte (1982), para afirmar que um problema consiste numa «questão em que o estudante não dispõe de nenhum processo rotineiro conhecido para a resolver, mas que lhe excita a curiosidade e o desejo de a solucionar». Aquele autor acrescenta que tanto nos exercícios como nos problemas existe um enunciado que indica, sem ambiguidade, o que é dado e o que é pedido e que, à partida, o professor sabe a solução e a resposta só pode estar certa ou errada.

De acordo com Charles e Lester (1982), um problema é uma tarefa na qual o indivíduo ou grupo, ao confrontar-se com ela, deseja ou tem necessidade de encontrar uma solução, sem que tenha ao seu alcance um procedimento imediatamente acessível que possa conduzir ou garantir o acesso à sua solução, exigindo da sua parte um certo esforço para chegar ao objectivo.

Segundo Mayer (1986), referido em Mamede (2001), uma situação é considerada problema se detém três características: (1) fornece o que o autor denomina por *dados*, isto é, numa fase inicial, fornece condições, objectos e informações ao potencial resolvedor; (2) indica o que apelida de *objectivos*, ou seja, numa fase terminal, possui uma meta a alcançar que impõe pensamento a quem o resolve; (3) possui o que chama de *obstáculos* entre a fase inicial do problema e a fase terminal que impedem o resolvedor de perceber a sequência óbvia e correcta de atitudes que permitem chegar à resolução do mesmo.

Schoenfeld (1996) vai mais além e afirma que a resolução de problemas não é apenas resolver um problema, mas um modo de entender o ensino e a aprendizagem da matemática e até da própria matemática. Este autor sublinha que o principal objectivo do ensino baseado na resolução de problemas é ajudar os alunos a aprender a pensar matematicamente. Por isso, considera potencialmente valiosos problemas que (i) sejam acessíveis para serem facilmente compreendidos; (ii) possam ter múltiplas soluções; (iii) possam servir como introduções a importantes ideias matemáticas e (iv) sejam abertos, de modo a servir para boas explorações matemáticas.

Neste trabalho, entende-se como problema uma situação quantitativa ou não, que requer resolução e para a qual o aluno não vê um caminho imediatamente disponível para obter a solução, mas que lhe desperta a curiosidade e o desejo de o encontrar. Os problemas são considerados desafios que (i) estimulam o raciocínio do aluno e a comunicação entre os intervenientes; (ii) desenvolvem a capacidade de resolução e a criatividade na elaboração da estratégia adequada; (iii) e versam tanto situações reais como fantásticas do mundo das crianças.

Problemas e investigações

Um outro conceito muito próximo de resolução de problemas é o de investigações matemáticas, também chamadas actividades investigativas. Por vezes, pronunciam-se estes dois termos de forma indistinta, chegando as tarefas a serem chamadas pelo mesmo nome; no caso por resolução de problemas.

Sabendo que ambos os conceitos se referem a actividades que envolvem processos elaborados de pensamento, que tanto uma noção como outra se referem a processos matemáticos complexos e que as duas envolvem actividades fortemente problemáticas (Ponte *et al*, 1998), pode dizer-se que existem nelas mais pontos comuns que diferenças, considerando-se, por isso actividades matemáticas próximas.

No entanto, concorda-se que existem características que as podem tornar distintas. O Quadro 2.1 mostra algumas dessas características, segundo alguns autores, mas, apesar disso, sabe-se que a separação pode ser difícil de estabelecer uma vez que tudo depende da pessoa que resolve o problema ou realiza a investigação. Uma tarefa pode ser um problema para um indivíduo e não o ser para outro. Também pode acontecer que a mesma tarefa seja um problema para um indivíduo num dado momento e, à posterior, seja apenas um exercício. Tudo depende dos conhecimentos que cada um possui no momento em que lhe é apresentada a tarefa ou do interesse que a mesma suscitar (Fernandes, 1994; Fonseca, 2000; Ponte, 2003).

Quadro 2.1 – Aspectos que distinguem *resolução de problemas* de *actividades investigativas*, segundo alguns autores.

	Resolução de problemas	Actividades investigativas	Autores
Natureza da questão a estudar	Especificada no enunciado, pelo professor	Apresentada de forma vaga, necessitando o aluno de a tornar mais precisa.	Ponte *et al* (1998)
Estratégias a seguir	Mais seguida pelas heurísticas (como as de Polya (1978))	Mais amplas (as possibilidades são imensas).	
Questão a estudar	Mais precisa	Imprecisa	Ponte e Serrazina (2000)
Objectivo da tarefa	Encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível (procura-se a solução).	Explorar todos os caminhos interessantes partindo de uma dada situação.	Ernest (1996)
Papel do professor	Formula o problema e deixa em aberto o modo de encontrar a solução.	Escolhe a situação de partida ou aprova a escolha do aluno e o aluno formula as questões.	
Papel do aluno	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema	Define os seus próprios problemas dentro da situação. E tenta resolver pelo seu próprio caminho.	

Neste trabalho, opto pelo termo Resolução de Problemas, por entender que ele diz respeito a uma actividade matemática muito rica que "envolve uma grande variedade de tarefas, tanto de cunho mais fechado como mais aberto, tanto relativas a situações puramente matemáticas como referentes a situações da vida real" (Ponte *et al*, 1998, p. 15).

A resolução de problemas, é assim considerada uma situação de aprendizagem, em que o aluno se confronta com questões às quais não consegue responder de forma imediata, mas que o levam a reflectir no como e no porquê, sempre na procura da solução.

A posição adoptada neste estudo, tem presente que o conceito de problema é sempre relativo ao sujeito a quem se destina (Ponte, 2003). Ser problema não é uma característica intrínseca de uma dada tarefa; do mesmo modo que ser actividade investigativa, depende essencialmente da relação que o aluno, potencial resolvedor, estabelece com ela.

A resolução de problemas na sala de aula

As crianças são naturalmente pessoas activas, curiosas e sociáveis. Como tal, a aprendizagem no 1.º ciclo deve ser baseada numa perspectiva construtivista em que o conhecimento resulta da actividade da pessoa em situação de aprendizagem. Neste nível de escolaridade, deve promover-se uma prática pedagógica centrada nos alunos, proporcionando-lhes actividades que atendam aos seus ritmos de aprendizagem, que lhes permitam interagir com outras crianças, com os materiais e com o mundo físico que as rodeia, consentindo que a actividade e a curiosidade, que lhes são características, os ajudem a construir, a modificar e a integrar ideias (Veia, 1996; NCTM, 1998).

As aprendizagens realizadas nos primeiros anos de escolaridade influenciam o desempenho das crianças no momento presente, mas também a sua relação com a Matemática no futuro. Assim, é necessário dar-lhes tempo para que desenvolvam uma construção sólida dos conceitos, proporcionando-lhes situações físicas que permitam que as abstracções matemáticas advenham das experiências empíricas (NCTM, 1998).

Há, portanto, que proporcionar às crianças experiências de aprendizagem activas, de maneira que elas possam depois associar o seu conhecimento matemático a outros tipos de situações. A atitude do professor na criação de um ambiente de aprendizagem baseado na resolução de problemas que permita e encoraje as crianças a comunicar as suas ideias com todos os intervenientes, conduz à valorização do processo de resolução de problemas e não só das suas soluções. Quanto mais cedo as crianças tomarem contacto com o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, mais oportunidades terão de se relacionarem com esse processo (Veia, 1996).

Também o NCTM (1998) refere que encorajar a exploração de uma grande variedade de ideias matemáticas, faz com que as crianças conservem o prazer e a curiosidade acerca da matemática. "Os professores têm de criar um ambiente que encoraje as crianças a explorar, desenvolver, testar, discutir, e aplicar ideias. Têm de ouvir as crianças, atentamente, e guiar o desenvolvimento das suas ideias" (p.22).

Uma componente fundamental da aula de matemática é o trabalho prático dos alunos. Para muitos deles, o uso de materiais manipuláveis, ou do próprio corpo, em actividades que envolvam o raciocínio, permite-lhes, antes de mais, uma base para a conversa, permitindo também que o professor observe, individualmente os alunos, inquirindo-os de forma a perceber que conhecimentos foram já construídos por eles e que dificuldades sentem. O uso de materiais concretos também os ajuda a adquirir uma melhor compreensão das ideias matemáticas, que devem ser aplicadas a situações do mundo real, ainda que, surjam a propósito do seu quotidiano. Isto para que elas compreendam que a matemática faz parte integrante das situações do mundo real e das actividades em outras áreas do saber.

Ao relacionar a matemática com a realidade, os alunos sentem-se mais motivados, pois, compreender e discutir o sentido das coisas transforma-as aos nossos olhos, deixa-as mais claras. Assim, o foco central do ensino da Matemática deverá ser a compreensão e a resolução de problemas ao invés da memorização das capacidades básicas (Abrantes, 1988; Curcio, 1990; Mamede, 2001; Veia, 1996).

A forma como se constróem os elos de ligação entre as noções informais e intuitivas das crianças e a linguagem abstracta e simbólica da matemática depende em larga medida do tipo de tarefas que o professor propõe aos seus alunos. Ao promover actividades em que convidam as crianças a explorar, descrever e explanar as suas ideias, o professor facilita um importante processo na aprendizagem, na sala de aula: a comunicação (Curcio, 1990).

As crianças a quem lhes é dada a oportunidade de falarem matemática, em pequenos grupos ou com os colegas da turma, elaboram mais facilmente o seu conhecimento, clarificando os seus pensamentos e aprendendo que existem outras formas de pensar sobre as ideias. Importa, por isso que, na sala de aula, as crianças representem, falem, ouçam, escrevam e leiam sobre matemática, tanto com o professor como com os colegas. Pois, "comunicar ajuda as crianças a clarificar o pensamento e a aguçar a compreensão" (NCTM, 1998, p.34).

Ao compreender o que faz, a criança desenvolve a capacidade de reconhecer e utilizar conceitos matemáticos nos mais variados contextos, incluindo a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas, usando uma linguagem clara e adaptada à situação (DEB, 2001).

Ao aprender matemática, mais facilmente as crianças irão compreender e interpretar o mundo em que vivem e mais aptas ficarão para resolver os problemas que nele sobrevierem, pois "aplicando a matemática, aprendem a apreciar o poder da matemática" (NCTM, 1998, p.23).

A resolução de problemas constitui um contexto universal de aprendizagem associado à comunicação e ao raciocínio, revelando-se por isso, um contexto ideal para que os conceitos sejam aprendidos e as capacidades desenvolvidas (DEB, 2001).

A este propósito, Paulo Abrantes (1988, p. 52) escrevia num trabalho em que pretendia comunicar uma experiência pessoal, de resolução de problemas, enquanto professor, que "de facto, a resolução de problemas consiste, acima de tudo, numa larga variedade de processos, actividades e experiências intelectuais" e não numa "actividade a desenvolver apenas em paralelo ou à margem das actividades curriculares".

Por isso, quanto mais cedo a criança se iniciar na actividade de resolução de problemas, mais probabilidades tem de experimentar o sucesso, em actividades desse tipo, no futuro. Ao professor do 1.º Ciclo cabe começar ou continuar a desenvolver na criança a capacidade de resolução problemas. E, à medida que as crianças avançam na sua escolaridade, dever-lhe-ão ser sempre colocados problemas interessantes, cada vez mais complexos retirados tanto de situações reais como de contextos matemáticos. Não se pretende, desta maneira, descurar as destrezas de cálculo, trocá-las ou ignorá-las, mas antes fazê-las emergir de situações problemáticas (Abrantes, 1988), pois, a actividade de resolução de problemas não é incompatível com a aquisição de capacidades básicas (Veia, 1996).

Como já foi referido, a actividade de resolução de problemas desenvolve capacidades consideradas fundamentais na educação matemática. Contudo, isso só é efectivamente possível, se forem seleccionados bons problemas para serem resolvidos na aula de matemática. Apesar desta escolha ficar condicionada ao tipo de trabalho que se faz na sala de aula, pode-se, em termos gerais, considerar que um bom problema deve (a) ser interessante e desafiador para os alunos; (b) estimular a capacidade de observar e de analisar criticamente; (c) impulsionar o debate e a interacção; (d) abranger a compreensão dos conceitos matemáticos e a aplicação de uma capacidade matemática; (e) assegurar que pode ser resolvido por mais do que um processo e ter também respostas múltiplas (KruliK & RudniK, 1993); (f) conduzir o aluno a outros problemas semelhantes; (g) ter uma resposta interessante (LeRoy C. Dalton, 1985, referido por Abrantes, 1988).

Os critérios enunciados podem e devem funcionar como guias orientadores a que o professor recorre para melhor escolher os problemas e assim conseguir maior motivação para as tarefas que pretende propor.

Sendo a motivação um dos factores que mais contribui para o sucesso e autoconfiança de cada um dos alunos na resolução de problemas, é responsabilidade do professor seleccionar e organizar os problemas tendo em conta a individualidade de cada criança a fim de que os mesmos sejam significativos para todos.

A respeito da selecção das tarefas, Polya (2003) refere que o nível de dificuldade de um problema deve ser o apropriado ao indivíduo que o vai resolver, o enunciado deve ser claro, de forma que aquele, após a análise, encontre a incógnita, os dados e as condições, estudando a compatibilidade, a suficiência e a unicidade das últimas.

LeBlanc, Proudfit & Putt (1980), identificam quatro factores que determinam o nível de dificuldade de um problema, que são: (a) o vocabulário, que exige o uso da terminologia matemática e não deve ser demasiado simplificado, mas deve ser compreendido pelos alunos; (b) a dimensão e estrutura das frases que compõem o enunciado, pode dificultar a compreensão do problema se não for adequada ao nível etário ou às dificuldades que o aluno revela, nomeadamente no âmbito da leitura; (c) o tamanho e a complexidade dos números inseridos distraem o aluno da própria resolução do problema, levando-o a centrar-se no processo de cálculo envolvido; (d) a representação do problema.

Já Charles & Lester (1982), distinguem sete aspectos que determinam o nível de dificuldade de um problema, a saber: (a) a complexidade das frases do enunciado, ou seja, a complexidade sintáctica, a porção de informação dada, a quantidade de condições e variáveis e os conteúdos matemáticos implicados; (b) os métodos de apresentação e representação do problema, pois, o modo como ele é colocado influencia a imagem mental do problema desenvolvida pelo resolvedor, podendo vir a prejudicar o sucesso da sua resolução; (c) a familiaridade do potencial resolvedor com procedimentos admissíveis para encontrar a solução, isto é, o problema torna-se mais difícil se requer a utilização de um procedimento que ainda nunca foi usado na resolução de problemas anteriores; (d) a proximidade com soluções ou procedimentos incorrectos resultante da apresentação do problema ou da sua natureza; (e) a dificuldade na identificação de objectivos intermédios por parte de quem vai resolver o problema e que muitas vezes conta com pouca experiência na resolução de problemas, não sabendo por onde começar nem o que fazer primeiro; (f) as inseguranças que aparecem devido a conceitos incorrectos e a deficientes compreensões da informação fornecida no problema e que levam ao fracasso da resolução porque alteram o mesmo; (g) os factores afectivos combinados com reacções reveladas pelo resolvedor, isto é, o interesse e o desejo de resolver o problema contribuem para que ele seja considerado como tal.

Conclui-se assim, que os aspectos mencionados por estes últimos autores estão englobados em três grupos: (a) factores afectivos, que têm a ver com a motivação, o interesse, o stress, a pressão..., que o problema provoca a quem o resolve; (b) factores relacionados com a experiência, ou seja a familiaridade que o resolvedor tem com as diferentes estratégias de resolução; (c) factores cognitivos, que estão relacionados com a capacidade lógica, de leitura, espacial..., do resolvedor.

É do consenso geral que a actividade de resolução de problemas é um processo muito complexo, dinâmico, com um ritmo próprio que resulta tanto das características do problema como da especificidade de quem o resolve e que os factores anteriormente enunciados interferem no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas nos alunos. Daí que seja atribuído ao professor maior responsabilidade quando este focaliza o ensino na resolução de problemas e não numa prática rotineira, com valorização do método expositivo.

A resolução de problemas compreende uma interacção do aluno com o problema, em que o aluno produz transformações tanto no plano material ou externo, como no plano mental ou interno, que se manifestam sob a forma de novos conhecimentos ou reformulações dos adquiridos. Esta preocupação com o processo de resolução de problemas onde têm lugar os processos mentais envolvidos neste tipo de actividades remonta ao início do séc. XX (Borralho, 1992), continuando ainda hoje a ser alvo de atenções. Não é tarefa fácil acompanhar os alunos nas diferentes fases dos seus processos de resolução.

Cada uma destas fases tem a sua importância. Procurar a solução de um problema deixa antever o empenho que é necessário despender em todas as fases do processo. A resolução de problemas implica compreender toda a complexidade semântica e sintáctica do problema, implica bons hábitos mentais para organizar toda a informação de forma a conceber um plano e lhe dar seguimento e, por fim, implica investigar as conexões do problema em causa ao fazer a revisão da sua resolução (Mamede, 2001).

A par das experiências de resolução que devem ser proporcionadas, devem estar também muitas experiências de formulação de problemas a partir de actividades do mundo real, de conjuntos organizados de dados e de equações (NCTM, 1998).

Na abordagem por resolução de problemas, os alunos partilham os seus raciocínios com os seus colegas e professores, aprendendo diferentes formas de representar problemas e estratégias, num verdadeiro ambiente de descoberta. As aulas estruturadas para este tipo de abordagem requerem a colocação de questões que incitem o raciocínio e a comunicação.

Tipos de problemas de matemática

Como anteriormente se disse, uma mesma questão, dependendo dos conhecimentos e da experiência do resolvedor, pode ser para uns um confuso ou embaraçoso problema e para outros apenas um mero exercício. Por isso, em primeiro lugar, o problema deve estar formulado de acordo com os interesses, motivações e características dos alunos de modo que constitua um verdadeiro desafio que provoca neles curiosidade e o desejo de o solucionar.

É devido a esse carácter relativo que existe grande variedade de problemas e consequentemente dificuldade em os classificar. Contudo, aqui se apresentam as classificações propostas por alguns autores, que apesar de usarem termos diferentes, focam aspectos comuns.

Assim, de acordo com os procedimentos de resolução necessários, Charles e Lester (1982), apresentam a seguinte classificação: (a) problemas de um só passo – que podem ser resolvidos através da aplicação directa de uma das quatro operações aritméticas básicas; (b) problemas de dois ou mais passos – que podem ser resolvidos através da aplicação de mais do que uma operação aritmética básica; (c) problemas de processo – que não requerem o uso de operações aritméticas básicas, mas antes o recurso a uma ou mais estratégias de resolução para se encontrar a solução, como sejam, de entre outras: dramatizar o problema, construir uma tabela, fazer um desenho, simplificar o problema, reformular o problema, identificar a informação dada, a informação pretendida e a informação de que necessita; (d) problemas de aplicação – que emergem de uma situação da vida real, em que é preciso recolher dados, e cuja resolução requer muitas vezes a utilização de uma ou mais operações e de uma ou mais estratégias de resolução, admitindo mais do que uma solução; (e) problemas tipo puzzle – situações potencialmente enriquecedoras que reclamam o envolvimento do aluno e requerem a sua perspicácia, habituando-os a encarar os problemas sob diversos pontos de vista.

Quanto à estrutura, Fredericksen, referido por Kilpatrick (1987), classifica os problemas em três categorias diferentes, argumentando que as diferenças estruturais daqueles, muitas vezes não permitem categorizá-los em bem ou mal estruturados. Assim, segundo aquele autor, existem (a) os problemas bem estruturados, que podem ser resolvidos através da aplicação de um algoritmo já conhecido e que têm ao seu alcance um critério para avaliar se a solução é ou não a certa; (b) os problemas estruturados, que exigem pensamento fértil da parte do resolvedor que deve criar todos ou parte dos procedimentos a utilizar, pois os procedimentos que levam à resolução não são claros. Embora semelhantes aos "bem estruturados", não podem ser resolvidos com a aplicação de um algoritmo; e (c) os problemas mal estruturados, que não estão claramente formulados, onde existe falta de procedimentos que assegurem uma solução e de critérios que indiquem quando a solução é alcançada.

Abrantes (1989), num artigo intitulado *Um (bom) problema (não) é (só) ...*, apresenta uma discussão do que é um problema, pretendendo, assim contribuir para a clarificação de um dos conceitos matemáticos mais incómodos, ao distinguir sete tipos de problemas, conforme o seu valor educativo e, a partir de exemplos. São eles: (a) problemas «de palavras» – este tipo de problemas são resolvidos através da aplicação de algoritmos conhecidos, atribuindo-lhes algum significado. Neste caso a excessiva repetição transforma-os em meros exercícios de truques de palavras; (b) problemas «para equacionar» - este tipo de problemas resume-se apenas à tradução de um enunciado por uma dada equação, onde a única coisa que pode variar é o grau de complexidade. Aqui, também a repetição em excesso em nada contribui para desenvolver a capacidade de resolução de problemas nos alunos; (c) problemas «para demonstrar» - uma demonstração é considerada uma excelente actividade de resolução de problemas se consistir na descoberta de um caminho e sua argumentação para provar uma conjectura ou uma proposição, caso contrário, pode tornar-se num simples exercício de treino de utilização de um teorema ou regra; (d) problemas «para descobrir» - este tipo de problemas despertam a curiosidade e o gosto pela Matemática, requerendo com frequência uma *ideia luminosa*[5]. A sua solução é quase sempre única e bem determinada, não sendo especialmente indicados para explorações e debates em grupo, são de grande interesse educativo; (e) problemas da vida real – a *matematização*[6] de situações reais requer alguma experiência e conhecimentos variados para ser resolvida. O seu enunciado é pouco preciso, necessitando o resolvedor de procurar todas as informações e formular outros problemas para encontrar uma solução. Neste caso não existe uma única solução, mas várias; (f) situações problemáticas – de enunciado vago, este tipo de situações desperta no aluno a necessidade de formular outros problemas, de gerar questões, de fazer conjecturas e de as provar. Não existe, neste caso uma única solução; (g) situações (ainda) não problemáticas – não existe a formulação clara nem indirecta de um problema, mas antes o convite à exploração do contexto. É preciso procurar descobrir, é preciso investigar, pois a situação é totalmente aberta e as soluções são várias. Estas situações são consideradas de alto valor educativo, por criarem condições favoráveis à aprendizagem significativa.

Ao pretender ajudar o aluno na resolução de problemas, o professor deve orientar a sua atenção através de uma série de questões e sugestões que estão agrupadas em fases e que constituem o processo de resolução de problemas (Polya, 2003).

Fases na resolução de problemas

Qualquer problema exige, para a sua resolução, um procedimento sequencial, onde se podem distinguir várias fases. Vários autores têm sugerido modelos de resolução de problemas. Neste trabalho opta-se pelo modelo apresentado por Polya (2003), no seu famoso trabalho, *How to Solve It*, por ter servido de base a todos os outros.

Publicado pela primeira vez em 1945, e com o título original *How to Solve It – A New Aspect of Mathematical Method*, o trabalho de G. Polya procurou ensinar um método geral de resolução de problemas, quer eles fossem puramente matemáticos, de engenharia, da vida prática ou simples quebra-cabeças (Polya, 2003).

---

[5] Itálico no original
[6] Itálico no original

Distinguem-se, então, segundo este autor, quatro fases na procura da solução de um problema ou quatro fases de trabalho como o próprio indica e que são as seguintes: (a) compreensão do problema, na qual se prevê que o indivíduo perceba claramente o que é necessário. Para compreender o problema o resolvedor deve lê-lo e interpretá-lo de forma a conseguir descrever o seu enunciado por escrito, oralmente ou em pensamento; (b) estabelecimento de um plano, que exige que o resolvedor relacione os diversos elementos, isto é que relacione os dados com a incógnita de modo a identificar as estratégias a utilizar, concebendo um plano; (c) execução do plano, que sendo uma espécie de roteiro da resolução permite chegar à solução, necessitando da verificação pormenorizada de todos os passos, até tudo ficar bem claro; (d) verificação, que é uma revisão da resolução completa do problema, reconsiderando o resultado final e o caminho que o levou até ele, procurando investigar conexões e generalizações do problema.

Cada uma destas fases tem a sua importância. Elas envolvem tanto a compreensão do problema a nível sintáctico como semântico, tanto a organização da informação para planear a abordagem ao problema como as habilidades necessárias para a implementação desse plano, como os processos mentais relativos à avaliação do trabalho realizado e do que se aprendeu (Charles e Lester, 1982).

Ultrapassada a primeira fase, é preciso pensar nas estratégias que permitem chegar à solução de determinado problema.

Estratégias de resolução de problemas

As estratégias de resolução de problemas são uma espécie de ferramentas matemáticas de que os alunos dispõem e que os podem ajudar a resolver um problema. A escolha da estratégia torna-se num dos passos decisivos para o sucesso dos alunos na resolução de problemas (Palhares, 2004).

Ponte e Serrazina (2000) salientam que os alunos, para além de deverem familiarizar-se com um grande número de estratégias, devem reflectir sobre o modo como resolveram um dado problema. A análise da estratégia deve ser uma questão central na discussão por toda a turma. "Deste modo, pensar acerca das estratégias acaba por se tornar uma actividade natural no trabalho matemático" (p. 55).

Vários estudos sobre resolução de problemas têm salientado a questão das estratégias e dos procedimentos, visando uma resposta à questão dos alunos poderem ser ensinados a resolver problemas utilizando as estratégias que levaram os matemáticos a ter êxito (Fernandes, 1992).

Para Nunokawa (2000) as estratégias de resolução de problemas são regras que ajudam um indivíduo a entender melhor o problema ou a fazer progressos em direcção à sua solução. Este autor mostra uma opinião positiva em relação ao ensino de estratégias.

Saber como começar a resolver um problema proporciona às crianças que com ele se confrontam um verdadeiro sentido de segurança (Suydam, 1980). Musser e Shaughnessy (1980) sugerem cinco estratégias de resolução de problemas, que o professor pode usar na sala para ensinar a resolver problemas com sucesso: (1) por tentativas – com esta estratégia o aluno, resolvedor do problema, tenta descobrir a solução usando os dados disponíveis e depois confirmar as condições do problema; (2) padrões – nesta estratégia o aluno focaliza-se em determinados passos do problema e encontra a solução pela generalização de soluções específicas; (3) resolver um problema mais simples – esta estratégia supõe a resolução de um caso particular de um problema. Frequentemente, aparece acompanhada da estratégia da procura de um padrão; (4) trabalhar para trás – nesta estratégia começa-se do fim para o princípio ou seja, pelo que se quer provar; (5) simulação – esta estratégia consiste na dramatização do problema a ser resolvido utilizando objectos, tomando decisões e analisando os dados que se vão obtendo.

António Borralho (1995) ao referir-se a estratégias de resolução de problemas de matemática usa o conceito "heurísticas", considerando-as como um tipo de "estratégias gerais que surge na resolução de problemas para obter progressos em problemas difíceis ou não familiares" ou ainda como "... procedimentos destinados a resolver um problema através do uso de regras que permitam chegar rapidamente à solução ou aproximar-se dela" (p. 23). O autor apresenta uma lista das estratégias mais utilizadas na resolução de problemas de matemática, onde estão incluídas as consideradas por Musser e Shaughnessy (1980), mas com novos nomes. São elas: (1) descobrir um padrão; (2) construir uma tabela; (3) dramatizar o problema; (4) utilizar um desenho ou outro modelo; (5) fazer um desenho, um diagrama ou um gráfico; (6) formular e/ou testar uma conjectura; (7) trabalhar do fim para o princípio; (8) seleccionar notação apropriada; reformular o problema; (9) simplificar o problema; (10) identificar a informação pretendida, a informação dada e a informação de que se necessita.

Ainda a propósito de estratégias na resolução de problemas, num estudo efectuado com crianças do 1.º ciclo do ensino básico, Pires (1992) aproxima-se da terminologia de Brunner e distingue três tipos de estratégias utilizadas pelas crianças resolvedoras de problemas. Segundo a autora, essas estratégias encontram-se relacionadas com o desenvolvimento cognitivo das crianças e com a necessidade de as mesmas utilizarem ou não materiais na concretização dos seus pensamentos. Assim, considera uma estratégia de acção, a estratégia que tem por base a manipulação de objectos representativos da situação, embora envolva algum simbolismo; uma estratégia iconográfica ou icónica, a que consiste na representação da situação proposta e da própria acção através de desenhos ou esquemas mais ou menos abstractos; e uma estratégia simbólica aquela em que existe uma acção mental representada através da linguagem simbólica da matemática. No seu estudo, a autora não define o conceito, no entanto, importa salientar a valorização que faz das estratégias espontâneas das crianças e como as mesmas são significativas para a aprendizagem da matemática.

No presente trabalho, por estratégias de resolução de problemas entende-se, pois, um conjunto de procedimentos utilizados pelos alunos, na sala de aula, para pensarem sobre a representação dos objectivos ou da meta a que desejam chegar e dos dados, ou seja da informação numérica ou verbal disponível, com o fim de transformá-los e obterem a solução.

A formulação de problemas

Polya (2003) considerou sempre a formulação de problemas como um aspecto importante da actividade matemática, a par da resolução de problemas. Porém, a tradição do ensino da Matemática tem colocado a responsabilidade da formulação de problemas no professor ou nos autores dos manuais escolares, dando pouca importância à diversificação das fontes dos problemas colocados aos alunos. Recentemente, a formulação de problemas tem sido objecto de alguma atenção na literatura (Silver, 1996).

Silver (1996) refere terem sido as Normas do Currículo e Avaliação da Matemática Escolar (1989) e as Normas Profissionais para o Ensino da Matemática

(1991) publicadas pelo NCTM dos Estados Unidos que, ao sugerirem a inclusão de actividades que valorizassem tanto a criação de problemas pelos alunos, como a resolução de problemas já formulados, nas nossas escolas, conduziram a um aumento de actividades de formulação de problemas pelos alunos nas aulas de Matemática. Em sua opinião,

> as experiências de formulação de problemas podem facultar aos estudantes oportunidades para desenvolverem relações pessoais com a Matemática. O processo de personalização e humanização dos alunos face à Matemática mediante o uso de tarefas abertas de formulação de problemas, convida-os a exprimir as suas próprias experiências. (pp. 155 e 156)

Nesta perspectiva, considera-se que existe sempre a possibilidade de os alunos colocarem problemas diferentes dos habituais e até revelarem os seus valores e compromissos durante a formulação de um problema.

Segundo este autor, existem três tipos de formulação de problemas em matemática, conforme ela ocorra: (a) durante a resolução de problemas sendo, por isso, referida como reformulação de um problema. Isto é, o indivíduo transforma o enunciado do problema original, tornando-o mais acessível a uma solução, relacionando-se, portanto com a elaboração de um plano; (b) antes de qualquer resolução de problemas, quando o objectivo é a criação de um novo problema a partir de uma dada situação natural ou artificial; (c) após a resolução de um problema, quando o indivíduo examina as condições desse problema para criar outros com ele relacionados, estando portanto associada à fase da verificação dos resultados, discutida por Polya (2003).

Silver (1996) analisa diversas perspectivas, segundo as quais se pode ver a importância e o papel da formulação de problemas em Matemática e apresenta três grandes conclusões: (i) a formulação de problemas pode proporcionar aos investigadores não só uma maneira de conhecer o pensamento matemático dos alunos, mas também uma forma de conhecer as suas experiências matemáticas anteriores; (ii) a actividade de formulação de problemas proporciona um excelente campo para exploração de ligações existentes entre as dimensões cognitiva e afectiva da aprendizagem da Matemática pelos alunos; (iii) é necessário sistematizar a investigação acerca da implicação das actividades de formulação de problemas nas capacidades dos alunos, formularem e resolverem problemas, compreenderem ideias matemáticas e na sua disposição em relação à Matemática.

Similarmente, Ponte, Matos e Abrantes (1998) numa análise aos trabalhos de Célia Alverca (1990), Pedro Palhares (1992) e Joana Porfírio (1993), que contemplam a formulação de problemas pelos alunos, afirmam:

> a capacidade de formulação de problemas de Matemática é bastante importante. Permite que, por um lado, os alunos "façam as perguntas", como diz um dos próprios participantes do estudo de Porfírio, e, por outro, melhora de forma significativa a compreensão das relações matemáticas envolvidas nas diversas situações. (p. 189)

Referem também que esses trabalhos concluem que os alunos são capazes de formular problemas perante um contexto educativo que lhes desperte interesse e que o facto de no início as formulações serem idênticas a simples exercícios ou a problemas antes resolvidos, isso pode ser alterado através de uma intervenção educativa adequada.

Contudo, e apesar de em qualquer grau de ensino de qualquer país se poderem observar alunos a resolver problemas nas aulas de Matemática, a resolução e formulação de problemas parecem ainda não ser entendidas pelos professores do 1.º ciclo em particular, como actividades matemáticas fundamentais no desenvolvimento do processo intelectual do aluno, uma vez que assumem os manuais escolares como referência para o cumprimento dos tópicos do currículo (Silver, 1996).

Este panorama exige aos professores que assumam uma nova atitude em relação à forma como se alcançam outros fins curriculares ou educacionais, nas suas aulas, através da formulação de problemas. O que importa é que se trabalhe o programa de forma reflectida, desenvolvendo-o tendo presentes as competências básicas para este nível de ensino, no contexto real da sua sala de aula.

Capítulo III

METODOLOGIA

Neste capítulo descrevo e justifico as opções metodológicas tomadas para levar a bom termo o presente estudo, tendo em conta as questões de investigação anteriormente formuladas. Explico como foram seleccionados os participantes e caracterizo-os, explano o modo como decorreu todo o processo de trabalho com a professora da turma, que instrumentos foram utilizados na recolha de dados e ainda o modo como estes foram analisados.

As opções metodológicas

A metodologia de um trabalho de investigação decorre da natureza das questões de investigação e do modo como o investigador se relaciona com o contexto em que a mesma se desenvolve. Neste trabalho pretendo estudar o papel da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática e, em especial, o seu contributo para o desenvolvimento da comunicação em alunos do 4.º ano de escolaridade.

Mais especificamente, procuro saber:

- o que é que os alunos aprendem de Matemática quando resolvem problemas,

- qual o papel do grupo nesse processo,

- que interacções ocorrem na actividade de resolução de problemas capazes de desenvolver a capacidade de comunicar dos alunos.

Na tentativa de dar resposta a estas questões e apesar de partir de referências teóricas, não existe o objectivo de tirar conclusões, confirmar hipóteses nem mesmo provar ideias pré-concebidas sobre o fenómeno apontado, ou fazer quaisquer generalizações. Existe sim, o objectivo de compreender o comportamento dos alunos participantes, a partir do contacto com os mesmos, no seu ambiente real, tentando interagir com eles de forma natural, não intrusiva e não ameaçadora (Bogdan e Biklen, 1994).

Para melhor compreender esses comportamentos, recorri à entrevista e à observação participante, onde estabeleci um contacto directo com a professora e com a turma a fim de recolher um conjunto de dados que me permitisse descrever e analisar que matemática aprendem os participantes na actividade de resolução de problemas e o modo como os mesmos comunicam e interagem entre si, durante essa actividade.

Pode afirmar-se, assim, que este estudo apresenta, segundo Bogdan e Biklen (1994) as características de uma investigação qualitativa, já que (1) a fonte directa dos dados é o ambiente natural e o investigador o instrumento principal; (2) a investigação é descritiva e os dados incluem transcrições de entrevistas, memorandos, fotos, vídeos e outros documentos; (3) o investigador se interessa mais pelos processos do que pelos resultados ou produtos; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva e (5) o investigador se preocupa com o ponto de vista dos participantes.

Surge, deste modo, como adequada, uma metodologia de investigação de carácter qualitativo. Além disso, o presente estudo consiste na observação detalhada de uma entidade tão bem definida como complexa: alunos de uma turma do 4.° ano de escolaridade do 1.° ciclo. Para estudar o que é que a relação entre a resolução de problemas e o desenvolvimento da comunicação tem de mais importante, específico e característico, optou-se por seguir uma perspectiva interpretativa. Para tal, estudam-se os participantes no seu contexto real para melhor conhecer o que aprendem, como comunicam e interagem quando resolvem problemas de matemática em grupo.

O estudo foi focalizado num dos grupos: Bela, Daniel, Sara e Tomás, seleccionado com a ajuda da Professora que melhor conhecia as crianças. Importa sublinhar que a minha atenção apenas esteve centralizada naqueles alunos enquanto o trabalho em grupos decorreu, ou seja, na segunda parte da actividade; nos restantes momentos (primeira e terceira parte da actividade), foi ampliada a toda a turma. As situações/problemas foram sempre trabalhadas por todos os grupos da turma.

Para que o acesso aos participantes fosse facilitado e estes ganhassem confiança na minha presença, fiz visitas regulares, à sala de aula, por um período de duas semanas, antes do início da recolha de dados, num total de oito horas. Nos primeiros dias, participei de forma limitada nas suas actividades, tentando entrar naquele que era o seu ambiente natural, pois, esta é uma investigação com uma forte componente de trabalho de campo e que exige uma presença directa e discreta do investigador no terreno (Bogdan e Biklen, 1994). À medida que as relações se desenvolviam e sentia ganhar a sua credibilidade, fui participando, moderadamente, nas actividades da sala de aula, acabando por realizar um trabalho com os alunos em tudo semelhante ao que viria a permitir a recolha de dados, procurando estabelecer um ambiente o mais natural possível, para dar maior legitimidade ao trabalho que pretendia desenvolver. Assim, para que os alunos se acostumassem à presença do equipamento e se familiarizassem com ele, efectuei a gravação em áudio e em vídeo de uma aula anterior à recolha dos dados. Esses registos foram depois visionados por todos. Deste modo, tentei tornar menos formal a relação com os alunos em estudo, desenvolvendo uma relação de proximidade com todos, chegando a ser solicitada quer pelos alunos, quer pela professora, para os ajudar numa ou noutra tarefa. Houve, no entanto, também a preocupação de ficar um pouco de fora recolhendo outros dados descritivos como aconselham Bogdan e Biklen (1994), ou controlando o equipamento.

É importante referir um outro aspecto que se prende com questões de ordem ética que envolvem este estudo e que é a necessidade de assegurar o anonimato dos participantes e a privacidade e tratamento dos dados recolhidos. Como tal, os nomes citados são fictícios e os participantes conheciam à partida que iam participar num estudo. Foram pedidas as devidas autorizações à escola (Anexo 1) e aos encarregados de educação (Anexo 2) dos alunos da turma participante, no sentido de minimizar eventuais riscos que possam resultar desta investigação.

O contexto do estudo

Os participantes

Em Julho de 2004, num encontro informal e ao tomar conhecimento do meu projecto de trabalho de investigação, a Professora, adiante também designada por Ana, sabendo desde logo que leccionaria o 4.º ano de escolaridade no ano lectivo 2004/2005, manifestou a sua inteira disponibilidade para colaborar no estudo que eu viesse a desenvolver. Nesse contacto ainda, foram expostos os objectivos e a metodologia de trabalho a adoptar ao longo da investigação. Solicitei também a sua disponibilidade para a realização de uma entrevista de alguma duração e autorização para a observação de um conjunto de seis aulas, espaçadas no tempo, a serem registadas em áudio e em vídeo. A adesão de Ana à proposta foi imediata, tendo-lhe eu garantido que o seu anonimato e o dos alunos seria preservado no documento final resultante da investigação.

Em Setembro de 2004, estabeleci novo contacto com Ana, que continuava a manifestar uma vontade extrema em participar no estudo que se pretendia desenvolver.

Foi depois efectuada a formalização do acesso ao campo, através de pedidos formais: um, à presidente da Comissão Instaladora do Agrupamento de escolas (Anexo 1) onde foi esclarecido o que se pretendia exactamente fazer, quais os objectivos do estudo, o que se tencionava fazer com os resultados e quais os benefícios que poderiam obter com a sua realização; outro, entregue a todos os encarregados de educação, no início do ano, em reunião de pais, por Ana, informando sobre o que se pretendia desenvolver, para além de indicar a razão da escolha daqueles participantes. As autorizações assinadas pelos encarregados de educação encontram-se no arquivo da escola participante no estudo.

Neste contacto, seguiu-se o conselho de Bogdan e Biklen (1994, p. 115) quando afirmam que o investigador deve "utilizar uma *abordagem objectiva*" explicitando os seus interesses, no sentido de que "os sujeitos que vai estudar cooperem consigo".

É importante realçar que tanto da parte do agrupamento, como da parte da escola e dos respectivos encarregados de educação não foram colocados quaisquer impedimentos ao decurso da investigação.

Refere-se que no primeiro caso, houve o cuidado de não se emitirem opiniões sobre a vida da escola alheias ao processo em estudo e em ambos os casos sempre se disponibilizou informação sobre o mesmo.

Estavam deste modo seleccionados os participantes do presente estudo.

A Escola

A escola onde se desenvolve a presente investigação, situa-se no concelho de Sintra e, recentemente, faz parte de um agrupamento de escolas horizontal, constituído por duas escolas do 1.º ciclo e dois Jardins-de-infância. É uma escola com mais de duas décadas, construída com base no modelo P3, mas com a "área aberta" e as salas fechadas. No espaço destinado ao recreio das crianças foi recentemente construído um pavilhão com duas salas de Jardim-de-infância, uma Biblioteca equipada com computadores, uma sala de recursos/materiais e uma de professores. As crianças deslocam-se naturalmente dentro dos espaços interiores do ginásio que é também refeitório.

A escola possui ainda uma outra sala mais pequena com computadores ligados à Internet, a que lhe chamam centro de recursos, cujo acesso é feito com acompanhamento do respectivo professor.

Do ponto de vista urbanístico, existem três blocos de habitação social para além de uma zona de vivendas e de um conjunto de prédios que se distribuem pelas ruas limítrofes. O contexto caracteriza-se por ser de alguma forma restrito tanto a nível cultural como sócio-económico.

Nesta escola encontram-se colocadas dezanove professoras, catorze das quais a leccionar o 1.º ciclo, três em apoio e duas sem componente lectiva e duas educadoras de infância. Sendo que o quadro dos professores da escola é constituído por sete professoras do Quadro de Escola, quatro do Quadro de Zona Pedagógica e oito do Quadro de Contratados. As últimas encontram-se em situação de substituição, sem garantias de permanência. Os professores efectivos fizeram a sua formação inicial nas Escolas do Magistério Primário, em alguns casos depois completada pelos cursos de CESE (Cursos de Estudos Superiores Especializados), como acontece com a professora dos alunos do estudo, ou mais recentemente pelos Cursos de Complemento de Formação.

No 1.º ciclo funcionam sete turmas no horário duplo da manhã e sete no horário duplo da tarde, num total de duzentos e oitenta alunos, aproximadamente. Dessas catorze turmas, três são do 4.º ano de escolaridade, sendo que duas funcionam de manhã e uma de tarde. A turma em estudo funciona em horário duplo da manhã.

A Professora

Neste trabalho, a professora não é o objecto de estudo, no entanto, considero relevante mencionar alguns aspectos do seu percurso profissional, assim como da sua percepção face ao ensino e à aprendizagem da matemática.

Por termos leccionado juntas numa outra escola, Ana era já do meu conhecimento pessoal. Contudo, havia já mais de dez anos que não nos encontrávamos.

É docente do 1.º CEB há 22 anos sendo efectiva há quatro anos nesta escola onde a recolha de dados se efectua. Fez a sua formação inicial na escola do Magistério Primário de Lisboa e mais tarde o CESE em Matemática e Ciências. Ana mostrou-se disponível para participar no estudo por "gostar muito de Matemática" (reconstrução de uma conversa informal). Tem 44 anos e mora a menos de 3 km da escola onde lecciona. É uma pessoa que gosta muito de conversar e a sua voz é calma, mas firme. As suas respostas, durante a entrevista foram, geralmente, prolongadas, manifestando entusiasmo quando falou de problemas que já tinha proposto aos alunos. Confessou nunca ter tido uma boa relação com a Matemática, passando sempre "com os mínimos" e que foi na escola do Magistério que fez as "pazes com a disciplina" (entrevista inicial).

Hoje, afirma, orgulhosamente, que tem a preocupação de proporcionar aos seus alunos bastantes oportunidades para fazerem matemática, mostrando-se convicta de poder melhorar o seu ensino. Nas suas palavras: "eu dedico muito tempo à Matemática, nem sempre dedico da melhor forma ou como eu gostaria..." (entrevista inicial). O seu principal objectivo é fazer com que os alunos gostem da disciplina, como se depreende das suas palavras repletas de boa disposição: "...é assim: aluno meu que não goste de Matemática, não é meu aluno, (risos)" (entrevista inicial).

Acompanha estes alunos desde o 2.º ano de escolaridade, inclusive. Envolve-se em experiências e projectos de escola, alguns deles relacionados com a Matemática. E, por isso, não compreende a razão pela qual os alunos "têm dificuldades em representar iconicamente [o problema e]... estão muito agarrados ao algoritmo" mostrando alguma indignação e desconhecimento do motivo que leva os alunos a reagirem assim.

Considera importante resolver problemas, "ir a situações reais", "a situações do quotidiano deles" de forma "que eles entendam ou tentem descobrir que aquela situação problemática tem uma aplicação prática na vida do dia a dia". Paralelamente, diz considerar "essa parte de explicar como fez muito importante, mas na prática depois, sinceramente, não funciona assim, porque não podemos estar uma hora e meia, num quarto ano, a discutir problemas e estratégias para chegar a um resultado" (entrevista inicial). Acredita que trabalhar sozinho ou aos pares é o ideal, pois, o trabalho em grupo torna a aula muito barulhenta e "há sempre um que não faz nada" (entrevista inicial).

Dá elevada importância à avaliação de um quarto ano, tendo em vista os anos subsequentes: "eles chegam ao final do 4.º ano e têm que estar aptos, a ...progredir depois num 5.º, 6.º ano" (entrevista inicial). Em relação ao desempenho da turma, revela baixas expectativas, pois "a turma de uma forma geral não é muito dotada, para o 4ºano, são muito fraquinhos, há miúdos muito fraquinhos". Tenta "que eles compreendam aquilo que fazem", mas o trabalho com a turma que considera, apesar de tudo, heterogénea exige, a seu ver, que diversifique as tarefas a propôr aos alunos pois, "uma parte da turma tem capacidades para entender o tipo de situações problemáticas não rotineiras, de adaptar, de descobrir", enquanto que, "um terço da turma, à partida, não tem essa capacidade, mas aprende tudo o que é mecanizado. Então, esses alunos têm que aprender tudo o que é mecanizado" (entrevista inicial).

É peremptória ao afirmar que, como professora, deve valorizar as diferentes estratégias apresentadas pelas crianças quando estas resolvem problemas, ao invés de impôr a sua estratégia como sendo única. Acrescenta que precisa de exercer um forte autocontrolo durante a actividade dos alunos para não o fazer. Nas suas palavras: "[durante a resolução de problemas] tenho de andar pela sala fora a controlar... a tentar controlar para não meter o bedelho onde não sou chamada, porque é assim: gostamos muito de andar a dar palpites e a dizer o que eles devem e não devem fazer, e depois às vezes estragamos o pensamento deles, isso já me aconteceu e eu sei perfeitamente [que não devo fazê-lo]"(entrevista inicial).

Mostra-se convicta de que "o poder de comunicação tem a ver com o trabalho de Português, de Língua" e que "os alunos que descrevem gravuras e personagens muito bem a nível de Português, quando chegam à parte da Matemática, sabem expôr muito bem aos colegas o que entrou no desenho deles, quem eram os personagens do problema, o que faziam... e depois, o resultado" (entrevista inicial). Considera, assim, que a capacidade de comunicar o raciocínio matemático está relacionada com um trabalho mais exaustivo na comunicação na área da Língua Portuguesa.

Encara o papel do professor como o de orientador da aprendizagem na sala de aula, permitindo uma participação cada vez mais activa dos alunos na construção do seu próprio conhecimento matemático. Refere com convicção que "ao professor cabe dar sempre reforço positivo". Quando se fala em estimular a comunicação entre os alunos, Ana afirma que não é um trabalho fácil pela avidez com que todos desejam participar, referindo que "entre os alunos, só com uma boa dose de paciência. Gerir as interacções é complicado!"

A Turma

A turma dos alunos em estudo é constituída por 20 alunos do 4.º ano de escolaridade, 8 raparigas e 12 rapazes, com idades compreendidas entre os 9 e os 11 anos. Este ano, foram integrados na turma dois alunos que ficaram retidos no 4.ºano.

Ana caracteriza-a como sendo uma turma heterogénea, já que existem alunos com algumas dificuldades de aprendizagem, tendo aulas de apoio educativo com a equipa de educação especial da escola.

A situação familiar dos alunos é estável. A maioria dos alunos frequenta ATL fora, uma vez que não existe na escola. Segundo Ana revelou na entrevista "são meninos com famílias estruturadas, que não lhes falta praticamente nada. Têm tudo o que precisam para viver bem. Os pais acompanham o trabalho de casa. Mas saem dali e vão para o ATL".

Num primeiro contacto com a turma não se notaram quaisquer resistências que, segundo a professora, se deve ao facto da presença habitual de alunos estagiários na sala, noutros anos lectivos. Pelo contrário, a turma mostrou-se bastante receptiva a novas experiências.

A turma está habituada a trabalhar individualmente, aos pares ou com toda a classe, em que se privilegiam as actividades de leitura e de escrita na área da Língua Portuguesa e a resolução de problemas que emergem da prática pedagógica. Porém, a minha proposta para que a resolução de problemas fosse feita em grupos foi bem aceite por Ana.

A escolha do grupo de alunos a observar na turma, durante a segunda parte da actividade, resultou de um pedido feito por mim, à professora, para que formasse os grupos de modo que fossem heterogéneos em termos de competência matemática e sexo. Foram então formados cinco grupos, tendo em consideração as preferências dos alunos.

O Grupo

Escolheu-se proporcionar o trabalho em grupos porque este permite aos alunos sentirem-se mais à vontade para expressar as suas ideias pouco trabalhadas e para comentar as ideias expressas pelos outros (Ponte e Serrazina, 2000).

Os alunos sentam-se, habitualmente, em mesas de dois lugares, dispostas em três filas. Segundo a professora, esta é a melhor maneira de os alunos não se dispersarem. No entanto, também têm realizado alguns trabalhos em grupo, estes fora do âmbito da Matemática. Todavia, não foi difícil constituir os grupos e depois seleccionar o que iria ser foco de estudo neste trabalho, durante a segunda parte da aula. Toda a turma aceitou de bom grado a formação dos cinco grupos de quatro elementos cada por parte da professora. Posteriormente, devido à transferência de uma aluna e ao pouco trabalho produtivo dos três alunos restantes, Ana sentiu necessidade de os dispersar sem que a constituição do grupo em foco fosse alterada.

Para este estudo, como já referi, veio a ser escolhido um grupo composto por quatro alunos: duas raparigas, a Sara e a Bela e dois rapazes, o Daniel e o Tomás. Essa selecção contou com a ajuda da Professora que melhor conhecia os alunos e teve em atenção: i) ter igual número de rapazes e de raparigas e, ii) ser heterogéneo em termos de competência matemática e de capacidade comunicativa dos alunos.

A minha atenção esteve focalizada naqueles alunos enquanto o trabalho em grupos decorreu, no que constituiu o seu ambiente natural, a sala de aula, estando todos os grupos da turma envolvidos na mesma tarefa. Sempre que surgiram situações com comportamentos dignos de registo, noutros grupos, são aqui referidos, oportunamente, ao contrário de serem ignoradas.

De seguida, tendo por base as entrevistas realizadas, caracterizam-se as crianças que constituíam o grupo.

A Bela

Bela, de cabelos compridos lisos e acastanhados, normalmente soltos, não se coíbe de apresentar as suas ideias sempre que necessário. Na entrevista mostrou-se pronta a colaborar, sempre muito próxima de mim, comunicando com facilidade as suas ideias. É uma menina bem disposta, chegando a contar anedotas pelo meio de uma tarefa. Está nesta turma desde o primeiro ano e é aluna de Ana desde o segundo ano de escolaridade.

Anseia pelo momento do dia em que a mãe a vai buscar ao ATL e a leva para casa onde pode jogar computador, estudar e brincar às professoras, imaginando os alunos.

Deseja vir a exercer várias profissões quando for mais crescida: exploradora do Egipto, por ser o país das múmias que a fascinam e existirem lá muitas cobras, o seu animal de estimação; bióloga marinha, porque também gosta muito de golfinhos; e modelo porque gosta de roupas novas e diferentes.

Considera-se boa aluna e gosta muito da sua escola. As suas disciplinas preferidas são o Estudo do Meio e a Língua Portuguesa, afirmando que gosta "mais ou menos da Matemática". Do que gosta "menos é das contas, porque a tabuada é difícil de estudar". Apresenta uma visão da Matemática bastante simplista, relacionando-a apenas com "contas e problemas" (entrevista inicial).

Encontra vantagens e desvantagens no trabalho em grupo. Afirmando, por um lado, gostar de resolver problemas em grupo "porque é uma situação diferente de *tar* sozinha", admitindo, assim, beneficiar das interacções desenvolvidas pelo grupo. Mas por outro, confia mais no seu desempenho do que no dos colegas, associando esse modo de trabalho aos conflitos internos causados pelas ideias diferentes de cada um. Acrescenta também, que um grupo só funciona se houver amizade entre os seus membros.

Tem uma noção bem definida de problema, distinguindo dois tipos: os fáceis e os difíceis. Quando lhe foi pedido que escolhesse uma de entre as três situações que lhe apresentei (ver Anexo 6), optou pela "C" por ser a sua favorita, uma vez que poderia fazer o desenho para encontrar a solução. Considera a "A" fácil, talvez por poder aplicar os algoritmos, uma estratégia bem conhecida. Refere que a "B" é difícil, provavelmente por não dispor imediatamente de nenhuma estratégia conhecida para a resolver, apesar de ter traçando oralmente um plano adequado. Da parte da resolução de problemas que gosta "menos é de explicar" o seu raciocínio à turma.

Para Bela, o professor tem por dever validar as respostas dos alunos e orientá-los no sentido de concluírem as tarefas, caso não estejam certas, fazendo-lhes "perguntas...[porque] são mais desafiadoras...não são fáceis..."

Ana considera-a uma aluna média, mas com algumas dificuldades a resolver problemas, apesar de ter bons resultados nos testes escritos. É autónoma no trabalho que desenvolve e muito solidária com os colegas.

O Daniel

Daniel tem 9 anos e também está nesta turma desde o primeiro ano, tal como Bela. De ar bastante descontraído e seguro, Daniel deseja vir a ser futebolista, disfrutando ao máximo o tempo do recreio na escola, momento que adora.

A escola é um lugar que frequenta com prazer pelas pessoas que são "simpáticas e amigas". Depois das aulas, vai directamente para casa onde vê televisão e faz os trabalhos que a professora marcou, acompanhado da família, outro dos momentos do dia seu favorito.

A sua disciplina preferida é Matemática, embora também goste de Língua Portuguesa. O que mais lhe agrada fazer "são problemas e contas". Considera-se bom aluno porque estuda, é bem comportado e não falta às aulas, a não ser por doença. Acrescenta ainda que, para ser bom aluno em Matemática, é preciso ser persistente e ter confiança nas suas capacidades para chegar à solução do problema. Prefere resolver problemas individualmente, pois acredita que se pode aborrecer se houver confronto de ideias com outros colegas. Considera os problemas matemáticos desafios que o fazem pensar e divertir-se, razão pela qual prefere "os que não se resolvem com contas". De acordo com essa opinião, diante das situações que lhe apresentei (Anexo 6), afirmou escolher a "C" iniciando no momento o estabelecimento de um plano de resolução.

Encara o professor como a autoridade da sala de aula capaz de lhe validar o trabalho e de o ajudar a prosseguir através de pistas. Em sua opinião, se pedisse a colaboração de um colega, ele poderia pensar que era competição ou "preguiça de pensar". Gosta de explicar o seu raciocínio à turma, através da oralidade "porque escrever dá muito trabalho".

A Professora, que o considera muito bom aluno, caracteriza-o como o melhor resolvedor de problemas da turma e o mais comunicativo, acrescentando que é um dos que consegue facilmente desenvolver estratégias de resolução para os problemas da aula de Matemática. É autónomo no trabalho que desenvolve e solidário com os colegas, características que o próprio assume abertamente.

A Sara

Sara, de 8 anos de idade, é a mais nova do grupo e é uma menina muito simpática, meiga e de sorriso espontâneo, gostando de contar anedotas em pequeno grupo e de ajudar os outros, de um modo geral. Tem cabelos castanhos claros quase sempre apanhados num longo e farto rabo-de-cavalo.

Nos seus tempos livres, em casa ou no ATL, lê, faz desenhos e pinta-os, brinca sozinha ou acompanhada da irmã de 6 anos que também frequenta a escola.

Ainda que só esteja nesta escola há dois anos, ela já é um lugar que lhe agrada, pelo que nada mudaria nela. As áreas de Expressão Plástica e Língua Portuguesa são as suas preferidas. O gosto que manifesta pelo desenho e pela pintura leva-a a desejar ser arquitecta, quando for mais crescida. A Matemática não aparece nas suas preferências por ter "dificuldade nas contas" e não gostar de "dizer tabuada". Por esses motivos, não sabe se é boa aluna. A sua visão desta disciplina é bastante limitada, baseando-se apenas nos números e operações.

No diálogo mantido durante a entrevista, afirmou que bons alunos em Matemática são todos os que vão "sabendo *muita* bem as coisas de Matemática e fazendo muitos problemas para se habituarem a muitas coisas...a muitas contas", ou seja, os que aplicam muito bem os procedimentos ensinados pela professora.

Distingue, sem muita certeza, exercício de problema, associando o primeiro a uma ordem que é preciso cumprir ou "uma conta que é preciso fazer" e o segundo a "uma coisa que temos de tentar descobrir" com uma conta ou um desenho, ou seja, uma questão para a qual é preciso encontrar resposta.

Perante as três situações que lhe apresentei (Anexo 6), analisa a situação "A" e diz "não gosto muito com dezenas e essas coisas todas..., mas por acaso resolvia com conta e desenho", ao ler a "B" afirma sem tentar compreendê-la: "eu não gosto muito...eu gosto é daqueles que têm números para saber...prontos, fico a saber mais alguma coisa", mas curiososamente, quando leu a situação "C", que não tem números, disse com convicção: "gosto. Este é divertido, por acaso!".

Para ela, o papel do professor na resolução de problemas é o de orientar o aluno na procura da resposta e o do aluno o de fazer muitos exercícios aritméticos como "contas e tabuadas". Nas aulas, apesar de preferir o trabalho individual, também gosta de trabalhar em grupo, mas sem barulho.

A professora considera-a uma aluna média, conseguindo bons resultados por ser muito responsável e empenhada nas tarefas. É boa comunicadora em contexto informal, mas deixa transparecer um certo nervosismo quando precisa de comunicar as suas estratégias à turma.

O Tomás

Tomás, 9 anos de idade, é uma criança introvertida, assumindo que não gosta de comunicar. Tem estatura baixa e no seu rosto destacam-se uns bonitos e meigos olhos castanhos. Este é o seu terceiro ano nesta escola e nesta turma.

Afirma que se for preciso ajudará algum colega que necessite do seu apoio, mas normalmente não o faz porque é "muito envergonhado" e não gosta de explicar como pensou ou fez.

Após as aulas vai para casa com a mãe, onde faz os trabalhos. Nas horas vagas brinca na rua, junto à frutaria dos pais, com alguns colegas da escola.

Durante a entrevista, esteve sempre sentado na ponta da cadeira, com ar desconfiado, respondendo umas vezes evasivamente às questões que lhe colocava, outras, simplesmente dizendo "não sei" para evitar responder (como por exemplo, quando lhe perguntei em que pensava quando ouvia a palavra Matemática). Durante as aulas não se distrai com ninguém, mas parece constantemente alheado do ambiente que o rodeia.

O gosto pela Matemática leva-o a desejar ser matemático quando for crescido. Considera-se bom aluno nesta disciplina. Para o ser também às outras, diz que basta, "esforçar-se", ou seja, "trabalhar". Quando lhe perguntei o que era um problema de matemática para si, primeiro não respondeu e, perante a minha insistência, respondeu "não sei explicar". Não obstante, afirmou gostar dos problemas em que necessita de aplicar os algoritmos e preferir aprender individualmente através da descoberta, ou seja, para si um problema é uma espécie de adivinha, cuja solução está em encontrar e acertar a operação aritmética que o resolve. Por isso, reafirma que o que mais gostou de aprender "foi a primeira conta de dividir com dois *númaros*" e menos, foi ter sofrido a frustração de não ter conseguido efectuar uma divisão por um número de dois algarismos antes da professora passar à seguinte.

Quando lhe apresentei as situações/problemas (Anexo 6) e lhe pedi que me dissesse qual ou quais seriam as que gostaria de tentar resolver, afirmou convicto que queria fazer a "A", "com uma conta de mais", e a "B" com uma conta de vezes. Ao contrário, não gostava da "C" porque, dizia: "não consigo começar a conta".

Diz preferir os problemas propostos pela professora, aos problemas do manual. Dando a entender que à professora cabe o papel de ensinar a matéria nova aos alunos e de autoridade máxima na sala de aula que os pode "mandar estudar" para serem melhores a resolver problemas.

É considerado por Ana "um aluno bom em tudo", "um cérebro" capaz de desenvolver estratégias de resolução de problemas de matemática, mas muito pouco comunicativo. É autónomo no seu trabalho, mas muito desorganizado na apresentação dos trabalhos e a sua caligrafia mal se entende.

O processo de trabalho

O trabalho com Ana

Ao iniciar o presente estudo tive sempre a preocupação de realizar com a professora da turma onde a investigação viesse a decorrer, um trabalho de cariz colaborativo. Pois, apesar de não ter turma no presente ano lectivo, o meu objectivo era reflectir e analisar a minha própria prática como professora do 1.ºCiclo.

A oportunidade de realizar o estudo na sala de Ana surgiu, quando um dia nos encontrámos, casualmente, ao portão da escola secundária que os nossos filhos frequentam. Ali mesmo a informei do meu projecto de trabalho. Ana mostrou-se logo bastante animada e disponível. Não hesitei em aceitar, pois, Ana leccionava a turma há mais de dois anos e disponibilizava-se, antecipadamente, a colaborar comigo num estudo que eu viesse a desenvolver. Tudo o que eu procurava!

Durante a entrevista que lhe fiz, percebi a sua experiência na área de resolução de problemas de matemática e o quanto se achava segura da sua prática pedagógica. Não obstante, dispus-me a trabalhar com ela quer no campo teórico, através da análise de documentação adequada, quer no prático, na sala de aula, enquanto o estudo decorresse.

Quando seleccionámos os problemas, falei com Ana sobre as fases de resolução de um problema para Polya e solicitei-lhe que baseasse as aulas de resolução de problemas nesse modelo. Ela aceitou, pedindo que lhe fornecesse a informação escrita, ao que acedi prontamente também a esclarecer alguma dúvida que viesse a surgir-lhe.

Também pela limitação de tempo que um estudo desta natureza exige, o trabalho colaborativo entre nós cingiu-se à escolha das tarefas a propor à turma, à escolha do modelo de resolução de problemas (Polya) a usar nas aulas e à escolha do modo como seria feita essa abordagem.

Assim, a proposta das tarefas na sala de aula, aos alunos, foi sempre feita por Ana, ainda que durante a actividade das crianças eu tivesse participado sempre que era solicitada por ela ou pelos próprios alunos.

Os problemas propostas aos alunos

A recolha e selecção dos problemas a propor aos alunos nas seis sessões a observar foi totalmente pensada e decidida a duas (entre mim e Ana), de acordo com o interesse dos alunos, tendo sempre em vista as questões do estudo (ver Quadro 3.1).

Assim, procurámos seleccionar problemas não rotineiros, onde se podem explorar diversas estratégias de resolução e que constituem formas de abordagens transversais do currículo de Matemática, adequadas ao nível de conhecimentos dos alunos participantes no estudo. Entende-se, pois, que estes problemas permitem a comunicação das ideias matemáticas através do uso da linguagem matemática, da linguagem natural e da linguagem corporal, recorrendo a desenhos, figuras, dramatizações e outras formas de representação (Ponte e Serrazina, 2000).

Quadro 3.1 – Os problemas propostos aos alunos no âmbito do estudo.

1.º problema: **O lobo, a cabra e a couve**

Um camponês está na margem de um rio e quer passar um lobo, uma cabra e uma couve para a outra margem. No seu pequeno barco só cabe ele e uma das coisas que tem de transportar.

Como é que o camponês tem de fazer, sabendo que se deixar o lobo sozinho com a cabra, o lobo come a cabra e se deixar a cabra sozinha com a couve, a cabra come a couve?

2.º problema: **Acerto de contas**

A Sofia, a Rita e a Catarina querem fazer uma festa de Natal e pretendem partilhar igualmente as despesas.

A Rita vai gastar 4,50 € em sonhos de Natal, a Sofia vai comprar um bolo por 6,50 € e a Catarina gasta 4 € em batatas fritas.

A avó da Sofia oferece a limonada, a mãe da Catarina dá os rissóis e a tia da Rita ajuda a pôr a mesa.

Como é que as três amigas devem acertar as contas?

3.º problema: **Na pizaria**

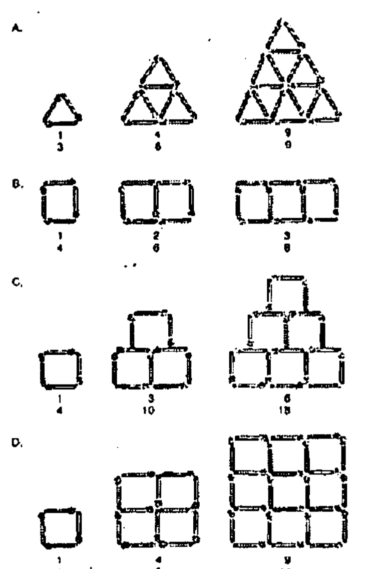
Na pizaria do Sr. André há um anúncio:

" Mais de 20 pizas diferentes"

Sabendo que se fazem pizas até 5 ingredientes, digam se o anúncio é verdadeiro.

4.º problema: **Fósforos e mais fósforos**

Em cada uma das sequências de figuras:
- Construam a figura seguinte.
- Continuem as sequências numéricas que estão por baixo das figuras.
- Descrevam a relação que encontraram entre as figuras e os valores de cada uma das sequências numéricas que estão por baixo de cada uma.
- Tentem encontrar uma nova sequência numérica que se possa relacionar com as figuras. Descrevam a relação que encontraram.



5.º problema: **Higiene dentária**

O Miguel lava os dentes três vezes por dia. Em cada lavagem gasta 1 cm de pasta dentífrica.

A irmã do Miguel, a Clara, lava os dentes apenas duas vezes por dia e costuma usar em cada lavagem a mesma quantidade de pasta que o irmão.

A mãe do Miguel e da Clara compra uma pasta especial só para os dois filhos. Cada tubo custa 3 euros e dá para fazer uma tira de pasta com 135 cm.

Leiam com atenção o texto e criem um ou mais problemas matemáticos para serem resolvidos:

Mostrem como poderiam encontrar a solução para os problemas matemáticos que criaram.

6.º problema: **Tabela de preços**

Esta é a tabela de preços de um parque de campismo.
Qualquer um de nós pode ir lá passar uns dias.
Observem com atenção a tabela de preços e inventem um ou mais problemas matemáticos utilizando os dados desta tabela:

Preços por dia	
Tenda grande (4 pessoas)	6 euros
Tenda pequena (2 pessoas)	5 euros
Adulto	3 euros
Criança (menos de 12 anos)	2 euros
Automóvel	1 euro
Animal de estimação	1 euro

Mostrem como poderiam encontrar a solução para um dos problemas matemáticos que criaram.

Os problemas foram todos seleccionados e organizados de uma só vez e as sessões de observação calendarizadas conforme as actividades da escola e da turma o permitiam.

Como referi na secção Opções Metodológicas, cada tarefa corresponde a uma sessão e foi apresentada por escrito numa folha. Cada aluno, individualmente, registou a sua resolução do problema, que geralmente foi também a do grupo e, a sua opinião sobre ele.

A abordagem dos problemas na sala de aula

As actividades pedagógicas de resolução de problemas, objecto de observação neste estudo, foram divididas em três partes: 1) apresentação e introdução da proposta de trabalho, pela professora, a toda a turma; 2) resolução do problema por pequenos grupos de quatro alunos e 3) comunicação e discussão dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo, em plenário de turma.

Na apresentação e introdução, Ana procurava, em primeiro lugar, motivar os alunos para o trabalho que iria propor a seguir, apoiando-se para isso na realidade vivida pelas crianças e, depois, que o problema fosse compreendido por todos os alunos. Para isso, lia em voz alta e solicitava a cada porta voz que lesse para o seu grupo a situação apresentada por escrito. De seguida, pedia voluntários que a recontassem após o que colocava questões com a intenção de os conduzir a uma melhor compreensão das condições colocadas no problema. Em algumas sessões inventariou com as crianças possíveis estratégias a utilizar para o resolver, mas em momento algum explicou como fazer.

No trabalho em pequenos grupos, os alunos, colaborativamente, encontraram respostas para os problemas propostos. Durante a actividade dos alunos, Ana circulou por entre os grupos, observando e intervindo sempre que era solicitada ou achava oportuno. Algumas vezes, também eu fui solicitada, tanto pelos alunos para os ajudar a sair do impasse que se havia criado no grupo, como por Ana para a apoiar na ajuda aos grupos. Pois, por vezes, tornava-se complexo para ela gerir o apoio a cinco grupos de trabalho.

Quando o trabalho de todos os grupos estava concluído, as crianças eleitas porta-voz dos seus grupos naquele dia, eram convidadas a falar, à vez, para toda a turma, das estratégias que as tinham conduzido à solução do problema. Nesta situação, Ana mantinha-se como ouvinte, ajudando os alunos com mais dificuldade na verbalização das suas ideias ou na clarificação dos seus pensamentos. Após as comunicações feitas pelos alunos, Ana apresentava também ela a resolução do problema, usando outro tipo de estratégia ou um modelo mais abstracto. No final, eram recolhidas as folhas dadas com o enunciado e nas quais os alunos tinham registado os seus resultados e opiniões.

A recolha de dados

Numa investigação como esta, o investigador torna-se o instrumento principal na recolha de informação. É necessário, portanto, empregar muito tempo nos contextos sociais em estudo (Bogdan e Biklen, 1994). Bogdan e Biklen (1994), sugerem que para uma investigação qualitativa, a recolha de dados se faça a partir de diferentes fontes de informação como: entrevistas, observação directa e análise de documentos.

Neste estudo, toda a recolha de dados foi realizada por mim, a partir de uma entrevista inicial à professora e aos alunos do grupo em estudo, da observação directa de seis sessões de aulas de resolução de problemas, e dos registos escritos dos alunos, resultantes da resolução dos problemas em cada uma das sessões (ver Quadro 3.2).

Quadro 3.2 – Método de Recolha de Dados utilizados neste estudo e sua descrição.

Método de recolha de dados	Descrição	Data
Entrevistas	Semi-estruturadas, com guião: - uma à professora - uma a cada criança do grupo em foco, num total de quatro	 Setembro 2004 Novembro 2004
Observação participante	Foram observadas e registadas 6 aulas de resolução de problemas com recurso a uma câmara de vídeo fixa e a um gravador áudio colocado na mesa do grupo em foco. Para cada uma das sessões, foi preenchido, após cada aula, um guião com base nos tópicos retirados durante a observação.	2.ª quinzena de Novembro de 2004 e 1.ª quinzena de Janeiro de 2005
Documentos	Registos escritos produzidos pelos alunos da turma quando resolviam as tarefas	2.ª quinzena de Novembro de 2004 e 1.ª quinzena de Janeiro de 2005

As entrevistas foram audiogravadas e transcritas e, logo após cada uma, foram escritos memorandos que contemplam as impressões e os comentários extra, ditos antes e depois da entrevista, constituindo uma espécie de diário pessoal que considero terem ajudado no desenvolvimento da investigação.

A cada uma das sessões de observação correspondeu uma actividade de resolução de problemas que foi registada com recurso à câmara de vídeo, fixa num ponto estratégico e a gravadores áudio dispostos nas mesas de trabalho de todos os alunos, minimizando assim possíveis constrangimentos causados ao grupo em foco. Ainda com essa intenção, foi colocada uma outra câmara de vídeo cujos registos foram destruídos sem ser visionados. Após as sessões, fiz um registo dos acontecimentos, com base nas gravações e nos relatos escritos daquilo que ouvi, vi, vivi e pensei no decurso da recolha, ao mesmo tempo que reflectia sobre os dados de um estudo qualitativo.

Os registos escritos dos alunos resultaram da resolução, em grupo, da tarefa apresentada em cada sessão de observação.

As entrevistas

«A entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem dos próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo» (Bogdan e Biklen, 1994, p.134).

Neste trabalho, optei por entrevistas audiogravadas com o consentimento prévio dos participantes, semi-estruturadas, isto é, tiveram por base guiões (Anexo 3 – Guião da entrevista à professora; Anexo 5 – Guião da entrevista ao aluno), previamente preparados, que serviram de eixos orientadores ao desenvolvimento das entrevistas. À medida que a conversa se desenrolava, as questões contidas no guião iam-se flexibilizando e adaptando ao entrevistado. De tal modo, que as questões foram todas colocadas, mas surgiram em sequências e momentos diferentes, permitindo que o entrevistado se sentisse em relativa liberdade, o discurso fluísse e as temáticas se aprofundassem. Na base da elaboração do guião esteve sempre presente a ideia de uma caracterização do público-alvo e do ambiente em que o estudo iria decorrer. Posteriormente, as entrevistas foram transcritas e a versão da professora revista por ela para que confirmasse as afirmações registadas.

A entrevista à Professora Ana

Em Setembro de 2004 realizei a primeira entrevista à Professora, previamente à observação das aulas e de qualquer contacto com os alunos. Os seus objectivos eram informar acerca do projecto de investigação em curso e caracterizar a sua prática pedagógica no domínio da resolução de problemas de matemática incidindo também em aspectos fundamentais relacionados com o problema do estudo como a importância dada à comunicação na aula de matemática.

No decurso da entrevista apresentei-lhe um conjunto de seis situações (Anexo 4) que, hipoteticamente, poderiam ser dadas a alunos do 4.º ano de escolaridade e que tinham como objectivo conhecer a sua perspectiva sobre cada uma delas, bem como o tipo de problemas que propõe aos alunos na sua sala e que papel lhes atribui na aprendizagem dos alunos.

Enquanto falávamos, Ana fazia questão de mostrar trabalhos realizados no âmbito de Projectos de Escola na área da Matemática e em que ela e os seus alunos tinham estado envolvidos em anos anteriores. Em cima da sua mesa tinha dois ou três trabalhos desses que folheou durante a entrevista, com bastante entusiasmo e alguma nostalgia.

A entrevista teve uma duração de cerca de duas horas, decorreu de forma natural, em jeito de confidências e foi gravada em áudio.

Após a entrevista, verifiquei que não tinham sido esclarecidos alguns pontos, pelo que, em Novembro, depois de escolhermos e organizarmos as situações que deveriam ser propostas aos alunos, lhe solicitei que falassemos um pouco deles.

As situações colocadas na entrevista

A entrevista à Ana tinha como objectivos, de entre outros, (i) conhecer o significado que esta atribuía a *problemas e a resolução de problemas* e (ii) recolher informação sobre a sua prática lectiva em resolução de problemas de matemática na sala de aula.

Para obter essa informação no decurso da entrevista semi-estruturada, tomei como opção mostrar-lhe seis situações[7] (Anexo 4), para que ela se pudesse pronunciar acerca da sua natureza. Era importante conhecer a forma como Ana entendia e operacionalizava a resolução de problemas na sala, pois, o restante trabalho de campo podia depender disso. Com o decorrer da entrevista pude perceber que Ana distinguia problemas rotineiros que propunha aos alunos "para adquirirem e sistematizarem as noções básicas de matemática", de não rotineiros "para desenvolverem o raciocínio" (entrevista inicial). Então, acordámos que ambas faríamos uma recolha de problemas a propor aos alunos nas aulas em que se iriam recolher os dados e posteriormente e em colaboração, procederíamos à sua selecção.

---

[7] Optei por esta nomenclatura, pois o termo *problemas* poderia influenciar a resposta.

Não esquecendo e concordando com Fonseca (2000), uma tarefa pode ser um problema para um indivíduo, num determinado momento, e após a sua resolução deixar de o ser. Ser problema depende do modo como o indivíduo se relaciona com a tarefa. Assim, foram apresentados problemas de dois tipos: rotineiros e não rotineiros.

Deste modo, foram colocadas duas situações que podemos classificar como rotineiras (situação A e B), por não colocarem grandes dificuldades ao aluno, por dispensarem grandes análises para que ele as possa resolver, ou ainda por implicarem um único passo para a sua resolução, indo facilmente ao encontro do seu conhecimento aritmético.

As restantes quatro situações, são exemplos do que normalmente chamamos problemas não rotineiros ou de exploração (Mamede, 2001). Isto é, são situações em que os procedimentos para a sua resolução não são evidentes, possibilitando o desenvolvimento e a aplicação de estratégias de resolução de problemas. Este tipo de tarefas implica a colocação de questões que provocam a comunicação e a interacção entre todos os intervenientes, permitindo que a criança deste nível etário se envolva mais activamente na procura de uma solução.

É nesta perspectiva de resolução de problemas que se pretende alicerçar este estudo.

As entrevistas aos alunos

Realizei as entrevistas aos alunos do grupo em foco em Novembro de 2004, no período de contacto que antecedeu a resolução das tarefas propostas nas sessões de observação. As mesmas têm como objectivos perceber a sua relação com a escola/ambiente escolar, para além de conhecer as suas perspectivas pessoais acerca da Matemática e como encaram e percepcionam os *problemas de matemática* e a *resolução de problemas* na sala de aula.

Com o propósito de compreender melhor este último objectivo, optei também por mostrar três situações (Anexo 6) a cada aluno entrevistado, de modo que escolhesse a que lhe daria mais prazer resolver e a que consideraria um problema para si. Estas três situações correspondem às situações "B,D e E" apresentadas à Professora na entrevista e foram escolhidas pelas razões apontadas na secção anterior.

Cada uma destas entrevistas teve duração diferente de acordo com o entrevistado, não ultrapassando os quinze minutos, a mais demorada.

Cumpriram-se os objectivos da realização das entrevistas, observando-se uma postura diferente em cada um dos alunos. Assim, Bela sentou-se na ponta da cadeira o mais depressa que conseguiu, tão ávida estava por participar. Daniel, descontraidamente, ocupou o seu lugar encarando a entrevista como se de uma amena conversa se tratasse. Sara fez questão de aproximar a cadeira o mais perto possível de mim, conversando carinhosamente sobre si. Tomás, mais tímido, sentou-se na cadeira com semblante sério, dando respostas curtas ou tentando escapar às perguntas colocadas.

A observação participante

"Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as acções podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência" (Bogdan e Biklen, 1994, p. 48).

Tendo em conta a natureza do estudo e o tempo disponível para a sua execução, as sessões de observação foram realizadas na sala em que os alunos, geralmente, tinham aulas e correspondem a seis aulas de resolução de problemas de matemática. Estas sessões realizaram-se durante a última quinzena de Novembro e a primeira de Janeiro, com interrupção em Dezembro para não quebrar possíveis actividades próprias da época natalícia. O tempo de duração de cada sessão variou com a tarefa apresentada.

Ao longo das sessões foi feita observação participante. Mas, por não ser professora da turma, tentei participar moderadamente no desenvolvimento das actividades dos alunos e apenas quando Ana ou as crianças solicitavam a minha presença junto dos grupos, uma vez que tinha intenção de registar, de forma não intrusiva, o que acontecia e recolher outros dados descritivos. Tal como aconselham Bogdan e Biklen (1994), procurei criar uma relação de empatia, mas ao mesmo tempo ser reflexiva, tentando melhorar a cada passo a qualidade da observação participante efectuada .

Privilegiei a observação participante, por ser a mais adequada forma de observação da interacção humana, permitindo compreender com minúcia os processos em que os alunos se envolvem na actividade de resolução de problemas, o que aprendem de Matemática e mais especificamente, como se desenvolve a comunicação durante esse processo.

Em cada sessão de observação realizada, optou-se por fornecer a cada aluno uma folha com o enunciado da tarefa proposta para que este pudesse efectuar, individualmente, todos os registos que julgasse adequados.

O desejo de captar as interacções existentes com e entre os alunos, durante a actividade de resolução de problemas, levou-me a efectuar a gravação das sessões de observação em áudio e vídeo. Pretendendo que a câmara de vídeo e o gravador não constituíssem nenhum entrave dentro da sala de aula, (eu e Ana) estabelecemos proporcionar aos alunos um período de adaptação aos instrumentos de recolha de dados. Como tal, foi gravada em áudio e vídeo uma sessão, de ensaio, em tudo semelhante a uma sessão de observação. Posteriormente, todos pudemos visionar os registos, desmistificando e tornando cada dia mais natural o uso deste equipamento.

Durante o período de adaptação e o da recolha de dados, foram colocadas duas câmaras fixas e um gravador em cada mesa de trabalho, para evitar sentimentos negativos nas crianças. Assim, o único registo transcrito foi o do gravador áudio da mesa do grupo em foco. Todos os outros foram destruídos sem serem visionados ou ouvidos.

É de realçar que, embora as crianças já tivessem estado na frente de uma câmara em momentos festivos, a sua presença na sala de aula constituía uma novidade. Com efeito, enquanto algumas delas se sentiam um pouco envergonhadas sentando-se de costas para as câmaras, outras mostravam-se bastante desinibidas, dizendo "eu gosto de ser filmada, pode virar para mim!" ou "de certeza que cabemos todos, professora?". Uma das alunas, no último dia, sugeriu a Ana que "depois podíamos também filmar outras coisas que fazemos". Assim, à medida que o estudo avançava, a presença do equipamento ia sendo progressivamente aceite com normalidade, na sala de aula.

Documentos

Os registos escritos individuais dos alunos, resultantes da resolução em grupo, dos problemas propostos nas sessões de observação, são uma fonte importante de recolha de dados que permitiu confirmar ilações sugeridas por outras fontes de dados.

Como tal, foram recolhidas e organizadas por mim e posteriormente analisadas e serviram de apoio à análise dos dados recolhidos nas sessões de observação.

A análise dos dados

A análise dos dados efectuou-se após estes terem sido recolhidos na totalidade, tendo em conta o objectivo do estudo, as questões de investigação e a revisão da literatura realizada. Incidiu principalmente sobre a actividade de resolução de problemas. Possui um carácter descritivo e interpretativo simultaneamente, procurando mostrar que matemática aprendem os alunos, qual é o envolvimento e desempenho do grupo e que interacções comunicativas ocorrem na resolução de problemas.

Numa primeira fase, mais precisamente no dia em que eram realizadas, transcrevi na integra as gravações áudio das entrevistas. O mesmo aconteceu com a transcrição da gravação das aulas, isto é, foram transcritas no mesmo dia em que foram registadas, visionando o vídeo em simultâneo com o áudio para poder captar todas as interacções ocorridas durante a resolução de problemas. Conjuntamente, ia organizando todo o material em dossiês, incluindo os registos de observação e os registos produzidos pelos alunos durante as aulas. Numa segunda fase, li e reli todo o material recolhido, cuidadosamente, sublinhando o que de relevante emergia relativamente ao problema a estudar.

As transcrições das aulas e os guiões de observação constituíram a base dos dados a partir dos quais se procura responder às questões do estudo. Para tal foram classificados em três grandes categorias: aprendizagem, interacções e comunicação. Todo o restante material, incluindo as conversas informais com a Professora, também constituíram fonte de informação para este trabalho. Na análise dos dados atendi ao modo como foi feita a abordagem da resolução de problemas na sala de aula: 1) apresentação e introdução da proposta de trabalho, pela professora, a toda a turma; 2) resolução do problema por pequenos grupos de quatro alunos e 3) comunicação e discussão dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo, em plenário de turma, uma vez que pretendia analisar o contributo da actividade de resolução de problemas para o desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos.

Importa mencionar que foi impossível separar a Professora da actividade dos alunos, pois foi ela quem, através da partilha de conhecimentos matemáticos dentro da sala de aula, deteve a responsabilidade da aprendizagem dos alunos pela via da comunicação matemática (Cobb *et al.*, 1993). Como tal, o seu papel é várias vezes salientado, analisado e interpretado.

Capítulo IV

AS CRIANÇAS E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Introdução

Compreender o papel da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática e, em especial, o seu contributo para o desenvolvimento da comunicação matemática é o objectivo principal deste estudo. Deste modo, apresento uma análise dos dados o mais descritiva possível, procurando simultaneamente interpretar os comportamentos dos alunos no contexto da actividade de resolução de problemas de matemática. A análise foca-se nas três partes em que a actividade pedagógica foi dividida e que correspondem ao modo como foi feita a abordagem da resolução de problemas na sala de aula: 1) apresentação e introdução da proposta de trabalho, pela professora, a toda a turma; 2) resolução do problema por pequenos grupos de quatro alunos e 3) comunicação e discussão dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo, em plenário de turma. Sublinho, de novo, que foi impossível separar a professora da actividade dos alunos, pois foi ela quem, através da partilha de conhecimentos matemáticos dentro da sala de aula, deteve a responsabilidade da aprendizagem dos alunos pela via da comunicação matemática (Cobb *et al.*, 1993). Como tal, o seu papel é várias vezes salientado, analisado e interpretado.

Por fim, discuto num comentário global que matemática aprendem os alunos quando resolvem problemas, qual é o papel do grupo nesse processo e que interacções comunicativas ocorrem na resolução de problemas.

1. *O lobo, a cabra e a couve*

1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma

Perante a apresentação do problema, foi possível observar alguns sorrisos nos rostos dos alunos que se adiantaram a ler o enunciado que lhes tinha sido fornecido (ver

Quadro 3.2). Será que entenderam que por ser um problema não numérico seria mais fácil de resolver?

Depois de terem lido em voz alta o enunciado, pediu-se aos alunos que recontassem a história. Notou-se alguma hesitação e só uma aluna se ofereceu. Porém, como não referiu todas as condições do problema, a professora, através da sua exclamação, procurou que a aluna reflectisse sobre a condição que faltava:

> Mara - Era um camponês que estava a passar um rio e queria passar uma cabra, um lobo e uma couve para o outro lado e ele sabia que se levasse a couve, o lobo comia a cabra e se levasse o lobo, a cabra comia a couve.
> Prof.ª- Então porque é que ele não levava os três ao mesmo tempo?
> Mara- Porque o barco só tinha um lugar.
> Prof.ª- Só tinha um? Então só lá podia ir o camponês!
> Mara- Ele [o barco] podia levar duas.

A palavra passou para outra aluna que deu o seu contributo, embora não tivesse sido muito precisa ao referir que "o barco era pequeno para levar os três". Interrogados por Ana todos os alunos concordaram com a colega.

Contudo, o problema ainda não estava compreendido. As questões colocadas pelos alunos davam a entender que o que julgávamos ser um problema acessível, tinha-se tornado um problema de difícil compreensão para os alunos:

> Sandra - Ele não podia levar a cabra e a couve?
> Prof.ª- Se ele levasse a cabra e a couve, quantos é que iam no barco?
> Aluno 1- 3.
> Prof.ª- Sandra, quantos iam no barco?
> Sandra- Ia o camponês, a cabra e a couve.
> Prof.ª- Quantos são?
> Sandra- 3.
> Prof.ª-Mas o que é que a Mara disse e que todos concordaram!
> Sandra- Que o barco era pequeno para todos.
> Prof.ª- Então já compreendeste? Podia ser como estavas a dizer?
> Sandra- Professora, mas ele não podia levar a couve no colo?

Ana respondia às questões dos alunos com outras questões com a intenção de que as crianças fossem compreendendo a fantasia da situação, concentrando-se apenas nas condições do problema e na sua incógnita, à medida que a tornava mais clara:

> Júlio - Professora, e se o camponês levasse os quatro para a outra margem, o lobo não os comia?
> Prof.ª- Se o camponês levasse os 4?!
> Júlio- Os 3!

Prof.ª- Então porque é que o lobo os comia dentro do barco e não os comia agora enquanto estavam na margem?! Sabes o que é uma margem?

Outra dificuldade que surgiu estava relacionada com o significado da palavra *margem*, mas que veio a ser ultrapassada com a explicação de um outro aluno.

Pode ainda observar-se que, por vezes, ao tentar que o aluno se concentrasse nas condições do problema, a professora fazia a pergunta e iniciava também a resposta, com o desejo de facilitar o raciocínio do aluno. Com a mesma intenção, outras vezes, surgiam da parte de Ana frases incompletas para que os alunos as completassem:

Prof.ª- A vontade do lobo era comer...
Alunos - A cabra.
Prof.ª- A vontade da cabra era comer...
Alunos- A couve.

E, sem que Ana tivesse tido o propósito de obter uma resposta, durante a fase de compreensão do problema, surgiu nas crianças uma ideia que era preciso testar. Ideia essa que a levou a pensar que a sua ajuda, na fase de compreensão do problema, poderia e deveria terminar ali:

Mara - Ah! Já sei professora, o camponês levava a cabra e assim o lobo não podia comer a couve.
Bela - Claro o lobo não gosta de couve!
Prof.ª- Bom, enfim, são hipóteses...têm que ser trabalhadas, têm que ser faladas em grupo. Agora quero pedir-vos que pensem noutra situação: de que maneiras é que vocês pensam que o problema poderá ser resolvido, de que maneira é que poderão resolver o problema no papel, isto agora já é uma outra ideia. Um de cada vez.

Seguiu-se então a enumeração de estratégias de resolução de problemas pelas crianças, em vez de surgirem estratégias de resolução para aquele problema. Referiam usar símbolos matemáticos e escrita matemática (expressões muitas vezes usadas também por Ana), desenho, escrita de um resumo, operações e uma tabela. O que é curioso é que perante um problema não numérico, ainda houve um aluno que referiu poder resolver este problema através de operações. Não se sabe que operação o iria ajudar uma vez que Ana não questionou o aluno a esse respeito. Ela tentava antes que as crianças verbalizassem os seus pensamentos e sentissem que poderiam expô-los sem serem julgadas. Assim, enquanto deixava que os alunos quase esquecessem o problema para nomearem diferentes estratégias de resolução de problemas, geria eficazmente as suas participações, repetindo o que cada um dizia, de modo que todos ouvissem e talvez reflectissem acerca da sua adequação ao problema:

> Prof.ª- Escrever com palavras? Ou escrita matemática? Referes-te a que escrita? Ou escrita dos romanos?
> Mara- À matemática.
> Prof.ª- À matemática, pronto. Diz Júlio, qual é a tua opinião, a tua ideia?
> Júlio- Do desenho.
> Prof.ª- Através do desenho. Mais ideias.
> Rogério- Escrever um resumo.
> Prof.ª- Escrever um resumo.
> António- Operações
> Prof.ª- Através de operações. Diz, Bela.
> Bela- De tabela.

Muito curioso foi poder verificar que apesar de terem resolvido poucos problemas comigo presente, a estratégia sugerida por mim e usada numa sessão de adaptação, uma tabela, foi recordada para este problema:

> Prof.ª- Através de tabela diz a Bela. Tens uma ideia de como é que irias fazer a tua tabela?
> Bela- Eu não tive ideia, mas como no problema anterior vocês [as professoras] puseram no quadro, eu lembrei-me.

O diálogo anterior comprova também o gosto de Bela em "aprender novos caminhos na matemática", revelado durante a entrevista.

E, apesar de não ser adequada a estas condições, nem parecer existir muita experiência da aluna no uso desta estratégia, ela tentou organizar os dados do problema numa tabela, rendendo-se depois, sem que nenhum dos colegas da turma manifestasse o desejo de intervir criticamente:

> Prof.ª- Então e o que é que achas que podias pôr na tua tabela?
> Bela- Os símbolos.
> Prof.ª- Os símbolos. Que símbolos?
> Bela- O lobo, a cabra e a couve.
> ...
> Prof.ª- Era só isso que punhas na tua tabela?
> Bela- Era. [pouco segura]
> Prof.ª- Precisavas de pensar melhor!?
> Bela- Era...

Enquanto Ana deixava que os alunos fossem falando de diferentes estratégias que conheciam para resolver problemas, eles iam estabelecendo mentalmente um plano de resolução para aquele problema ao mesmo tempo que aceitavam as suas condições e colocavam questões relacionadas com o conhecimento do que é um lobo.

> Prof.ª- Mara, o que é que tu desenhavas?
> Mara- Desenhava um barco lá à beira do rio, desenhava a cabra o lobo e a couve.
> Prof.ª- Depois como é que fazias?
> Mara- Por símbolos matemáticos... Professora, se ele levasse a cabra o lobo não comia a couve!

Esta primeira parte da aula durou cerca de 17 minutos e terminou quando uma das alunas sugeriu que o camponês levasse primeiro a cabra para a outra margem, sendo depois alertada, por um outro colega, para uma situação que não tinha ainda previsto:

> Prof.ª- Ia lá colocar a cabra na outra margem, e depois?
> Mara- Depois, vinha buscar a couve.
> Manuel- Assim a cabra comia a couve!
> Prof.ª- Ora bem, é isso mesmo que vocês agora têm que discutir em grupo. Podem começar o trabalho de grupo.

Ambas acreditávamos que os alunos chegavam com mais facilidade a uma solução se representassem através da acção aquela situação, mas afinal as crianças não escolhiam esse caminho. Perante a surpresa de Ana sugeri-lhe que utilizasse essa estratégia na terceira parte da actividade, em plenário de turma.

2.ª parte da actividade: resolução do problema pelo grupo em foco

O grupo iniciou bem o seu raciocínio, havendo intervenções equitativas por parte dos quatro elementos. Mas, o problema parecia não ter sido bem compreendido por Bela. E, enquanto esta última persistia com a sua opinião, parecendo não querer abandoná-la, Sara tentava que ela percebesse as condições do problema, acabando por lhe ocorrer outra situação:

> Bela - Ele leva primeiro a couve.
> Daniel - A cabra.
> Tomás - A cabra sim porque fica a couve e o lobo.
> Sara - E o lobo não gosta de couve.
> Tomás- Então leva a cabra!
> Bela- Não, primeiro leva a couve, depois então leva a cabra!
> Sara- Não, espera, espera, se tu levas a cabra e a couve, a cabra comia a couve!

A postura de Daniel revelou muita autoconfiança, embora acreditasse que outros colegas também conseguissem resolver a situação. Parecia aceitar as diferenças respeitantes à competência matemática de cada um dos outros elementos, ajudando-os a interagir se tal fosse necessário:

> Daniel- Diz lá a tua [ideia], Tomás!
> Tomás- Primeiro a cabra.

Aqui, Daniel socorreu-se da representação gráfica/icónica do problema e explicitou o seu raciocínio de uma forma muito rápida, ainda que não tivesse verificado se as condições tinham sido satisfeitas:

> Daniel- O camponês vai buscar a cabra p'ra'qui [com a régua indica o caminho na sua folha de papel, depois volta a colocar a régua na outra margem], vai levar o lobo pr'a'qui [volta com a régua] e vai levar a couve pr'a'qui. Assim ficam os três [sorriu]. É um bocado estúpido, mas...

Tomás, por seu lado mostrou-se uma criança muito pouco comunicativa e de respostas curtas, talvez porque não conseguia expressar-se oralmente com clareza, na opinião de Ana. Muitas vezes tinha um raciocínio correcto, mas Bela e Sara pareciam não aceitar as suas contribuições de muito bom grado, levando-o a trabalhar muitas vezes de forma egocêntrica.

Por exemplo, nesta aula, Tomás, depois de ter feito um esquema, fez tentativa de mostrar aos companheiros que tinha tido uma ideia luminosa para a resolução do problema. "Ah, sei outra!", exclamava ele para chamar a atenção dos colegas, mas nem mesmo assim a obteve. Continuou, por isso, a executar o seu plano individualmente sem o comunicar ao grupo, afinal eles não se tinham mostrado interessados. A não clarificação dos seus pensamentos, ou melhor a falta de verbalização das suas ideias, valeram-lhe alguns comentários mais desagradáveis por parte da Sara, como: " Tomás, já estás a fazer aquelas coisas que nós não percebemos nada!", ou "o Tomás faz uma coisas esquisitas sem dizer nada!."

Daniel, pelo contrário, verbalizou os seus pensamentos e solicitou a participação de todos na procura de uma solução comum, sendo bem visto por todo o grupo que confiava na sua capacidade de resolução de problemas. Durante essa verbalização também ele percebeu que o seu pensamento não estava totalmente correcto:

> Daniel- Olhem vou primeiro pôr os símbolos: o camponês é um xis,
> Sara- Então não podemos pôr xis com xis, pois não?

Daniel- O que é que vamos fazer para a cabra? [directamente para a Bela] pode ser a bola, Bela? Beeelaaaa [a chamá-la] ...
Bela- A bola?
Daniel- Pronto, a bola vai ser para a couve. Agora meto xis bola ao lado , xis bola ao lado xis... ele *tá* a levar a couve. Ai não, primeiro tem de levar a cabra!

Nesta parte da actividade, tanto Sara como Bela pouco contribuíram para a construção do trabalho de grupo, aceitando passivamente a solução que Daniel propôs. Sara preocupou-se apenas em copiar a representação gráfica do problema que Daniel registara na sua folha. As duas colegas têm muito bom relacionamento, interagindo de forma concordante uma com a outra. Essa atitude vai ao encontro do que Bela havia manifestado na sua entrevista: "gosto mais de trabalhar em grupo com a Sara".

Na sua primeira aproximação ao grupo, Ana quis saber se a maioria deles sabia o que estava o Tomás a fazer, pois, ele tinha um registo diferente de todos os outros. Bela e Sara queixaram-se de não entenderem o raciocínio dele e Tomás nada argumentou em seu favor. Não era a primeira vez que esta situação se verificava e Ana, sabendo disso, geria o conflito, por um lado, incentivando Tomás a comunicar aos colegas de grupo as suas ideias e pensamentos acerca da forma como pensava que o problema poderia ser resolvido e, por outro, despertando a curiosidade nos outros em relação ao que o colega fazia e não comunicava:

Prof.ª- Então o que é que está a contecer com o Tomás, diz lá Sara?!
Sara- É que o Tomás faz umas coisas esquisitas sem nós sabermos e depois nós não percebemos nada!
Bela- Nós estávamos a tratar dos símbolos e ele não!
Prof.ª- Vocês estavam a queixar-se que da outra vez também tinha acontecido isto, é?
Bela e Sara- Siiiim!
Sara- O Tomás faz umas coisas esquisitas sem dizer nada!
Prof.ª- Porquê Tomás? explica-nos lá. Estás a trabalhar em grupo... deverias estar. Porque é que tu começas já avançar para a frente?! Fazes, fazes... e não comunicas aos teus colegas!...

Quando interpelado por Ana, Tomás não conseguiu expressar-se, ficando calado a olhar a professora com olhar terno.

Logo que Ana se afastou, Tomás fez menção de apagar o que tinha feito e nenhum dos colegas se mostrou interessado em conhecer os seus registos da resolução do problema, o que dá a entender alguma falta de credibilidade para com ele.

Enquanto Sara se interessava em perceber o que significavam os símbolos criados por Daniel, Bela, que continuava sem ter compreendido uma questão, por dificuldade na leitura, resolveu interpelar o grupo: "Olhem lá, "...se deixar a cabra sozinha com a couve, a cabra come a couve?" é uma pergunta!?", mas ninguém a esclareceu.

Ana reaproximou-se e solicitou a Tomás que explicitasse o seu raciocínio ao invés de apagar tudo o que tinha registado, dando-lhe assim ânimo para que continuasse o seu pensamento. Enquanto isso, Bela mostrava uma atitude menos simpática para com o colega:

> Prof.ª- Não apagues nada, Tomás. Vais explicar aos teus colegas, contar tudo direitinho. Pode estar bem...
> Bela- Pode estar mal...

Fruto de uma reflexão rápida, Ana colocou os dois resolvedores a confrontarem as suas ideias: primeiro, pediu a Daniel, aluno mais comunicativo, que verbalizasse o seu pensamento e depois a Tomás. Assim, a professora dava mais uma oportunidade aos alunos para reflectirem sobre os seus próprios pensamentos. Ela previa que sozinhos não seriam capazes de alcançar um caminho, pela dificuldade que revelavam em centrar-se nas condições do problema.

O diálogo que se segue continua a evidenciar a atitude positiva da professora para com o aluno menos comunicativo face ao grupo:

> Prof.ª- De certeza que tens ideias bem. Podem algumas ideias não estarem de acordo com as dos teus colegas, mas com certeza, tens aí muitas coisas importantes. Vais dizer ao teu grupo. Aliás, o Daniel explica ao Tomás, os três estão a trabalhar igual, não é?
> Bela- Sim, os símbolos é que são diferentes.

Nesta parte da actividade, Ana procurou incentivar Tomás a interagir com todos os outros elementos, pois, ela sabia que ele era um aluno com dificuldades em comunicar aos outros as suas ideias e em se impor no grupo. É notória também a importância atribuída aos símbolos, a ponto de quase se esquecer o problema, percebendo-se da parte da professora, um apelo à compreensão e construção da escrita simbólica:

> Prof.ª- Os símbolos são diferentes. Cada um tem o seu símbolo, é isso?
> Bela- Alguns são iguais.
> Prof.ª- Então, Tomás, vais ouvir o que o Daniel vai dizer. Vá Daniel, explica lá.
> Daniel- Primeiro comecei a fazer os símbolos: xis é o barco do camponês, a bola é a couve, o triângulo é a cabra, o quadrado é o lobo. Então primeiro eu fiz o camponês a levar a cabra.
> Tomás- E não fizeste o barco?
> Daniel- Depois fiz ele a levar a couve. Fiz o símbolo que escolhi para ele.

Sara- Aqui fizeste o quê? (apontando para a 'bola')
Daniel- A bola é a couve.

Sara continuava a copiar a representação icónica da resolução feita por Daniel (ver Figura 1), só se apercebendo de algumas incoerências quando o ouviu. Tentou alertá-lo, mas sem sucesso. Também aqui as questões do dia-a-dia surgiram de novo quando Daniel desenhou a cabra afastada da couve significando que ela não a via e por isso não a poderia comer:

Bela- Ó Daniel, mas se tu deixavas a couve sozinha com a cabra,a cabra comia a couve!
Daniel- Não, ela está nesta parte e ela está nesta [desenhou o símbolo da couve afastado cerca de 5 cm do símbolo da cabra], ela não vê, se ela tiver algumas árvores aqui, ela não vê!
Sara- [batendo com a mão na testa] Oh, meu Deus!
Prof.ª- Então tu achas que ela não se vai deslocar para ir atrás da couve?
Daniel- Mas o lobo também está ali e se puser o lobo para aqui ficam os três juntos.

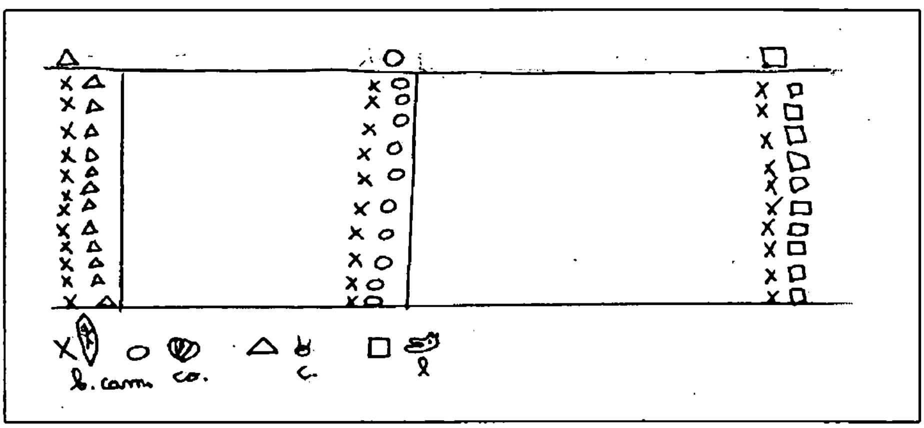


Figura 1 – A primeira estratégia usada por Daniel para resolver o problema do camponês.

Daniel não conseguia reflectir melhor sobre as suas ideias e Ana tentou ajudá-lo inquirindo-o. Contudo, ele estava demasiado convicto da solução que encontrara e que apenas contemplava uma das condições: atravessar as três coisas para a outra margem:

Prof.ª- Daniel, explica lá novamente, o que é que levaste primeiro?
Daniel- A cabra.
Prof.ª- E depois?
Daniel- Depois foi a couve.
Prof.ª- A couve... e que é que a cabra mais quer comer?
Daniel- A couve, só.
Prof.ª- Então e quando o camponês depositou aqui a couve, ele ficou a guardar aqui a couve e a cabra?

Daniel- Não, foi buscar o lobo.
Prof.ª- Foi embora. Então?
[E como Daniel não reagia]:
Prof.ª- Então, o que é que acontecia aqui entre estes dois?
Daniel- A cabra comia a couve.

Sara era a única que não olhava, apenas se mostrava interessada em copiar uma solução que o grupo avaliava com a ajuda da professora. Enquanto copiava pelo registo de Daniel, Sara imprimia ao seu registo um cunho pessoal através da utilização de alguns símbolos pictóricos diferentes (ver Figura 2). Tomás e Bela também se mostravam distraídos necessitando de constantes apelos para participarem.

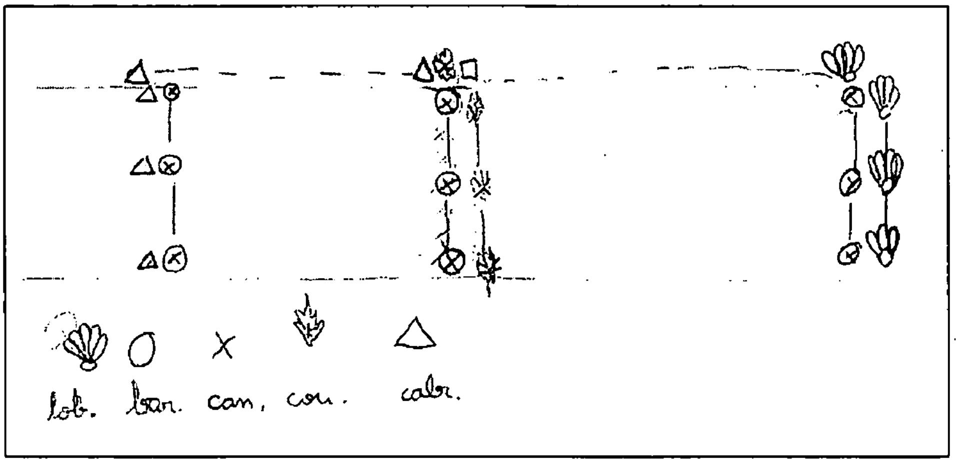


Figura 2 – Registo efectuado por Sara a partir do de Daniel.

Compreender o problema não estava a ser uma tarefa fácil e os alunos respondiam sem reflectir, pelo que Ana, pacientemente, chamava a atenção dos alunos para cada passo da resolução.

Quando chegou a vez de Tomás falar das suas ideias, os colegas de grupo não pareciam estar muito interessados em ouvi-lo, apesar de Ana solicitar: "agora vocês vão ouvir o que o Tomás tem para dizer. Oiçam a [ideia] do Tomás e olhem para lá. Vai apontando com o teu lápis, Tomás."

Tomás continuava a revelar dificuldade em se expressar oralmente. Tentou verbalizar o que fez, o mais rapidamente possível, mas a sua ideia não foi perceptível e Ana, calmamente, persistiu para que clarificasse o seu pensamento junto do grupo, ao pormenor e, consequentemente pudessem avaliar a solução que tinham encontrado.

Começou por apresentar a mesma solução que Daniel e depois trocou a cabra pelo lobo. Mas, não era fácil para ele explicitar o seu raciocínio:

Tomás- Desenhei as figuras. Depois o camponês a ir para o barco e a ir para... a ir sozinho por aqui e sempre assim.
Prof.ª- Não percebi o que é que ele levou, o que é que ele deixou, o que é que ele foi buscar...
Tomás- Primeiro levou a cabra, depois levou a couve.
Prof.ª- Repete lá a tua ideia novamente!
Tomás- Ele tinha i...a cabra com o homem a ir para o barco, depois, meti aqui a cabra, para ir buscar o lobo.
Prof.ª- ...o lobo. Então quem é que lá ficou agora? O camponês agora foi embora, não foi? Quem é que lá ficou?
Tomás- O lobo e a cabra.
Prof.ª- Podem?
Daniel e Tomás- Não [em simultâneo].

Os dois alunos concordavam explicitamente com a mesma ideia, então Ana afastou-se, pensando ter provocado no grupo alguma mudança de comportamentos.

Bela e Sara perdiam-se as duas com hipóteses, afastando-se assim, das condições do problema. Daniel tentou alertá-las insistindo em repetir o que deveriam levar primeiro, mas Bela não prescindia da sua ideia. Os dois argumentavam e confrontavam as suas opiniões até que, Tomás, percebendo a dúvida da colega, interveio ajudando-a a reflectir. Então, ela acabou por aceitar a proposta de Daniel que afinal era a que o grupo vinha a defender desde o início desta segunda parte da aula:

Bela- Sim, eu sei. Por isso, levas primeiro a couve, depois descarregas lá a couve. Depois levas o lobo...o lobo não come couve...
Daniel- Depois o lobo fica lá... sozinho. *Tás* a dizer que leva primeiro a couve!!
Tomás- E a cabra? Não fica comida pelo lobo?
Daniel- Yá Bela!
Bela- Não, não estás a perceber! Estás a ver a cabra? A cabra já está aqui e o lobo...Ah! pois é!... esquece!

Contudo, continuou a verificar-se uma certa dificuldade de relacionamento do grupo com o Tomás. Quando este tentou captar a atenção dos outros elementos, eles distraíram-se com hipóteses que lhes dificultaram o processo de resolução do problema, tornando a sua comunicação com o grupo mais difícil.

Tomás- Já sei! Eu já sei!
Bela- Ó pá, vamos ler o problema agora. Pode ser que nos dê ideias.

Embora tivesse já efectuado um ganho cognitivo, Bela persistia com uma dificuldade na interpretação do enunciado escrito que não ultrapassou anteriormente. Verificou-se, assim que a dimensão e estrutura das frases que compõem o enunciado, dificultou a compreensão do problema, nomeadamente no âmbito da leitura a esta aluna, como evidencia a reflexão, em voz alta, da mesma:

> Bela- Está aqui a perguntar se... Sabemos que o lobo come a cabra. Só que diz aqui «a cabra come a couve?», a perguntar!

Sara, por sua vez, estava mais preocupada em que o grupo resolvesse o problema depressa senão iam "ficar como no outro problema", isto é, não o conseguiam resolver. É que as expectativas que ela própria tinha criado acerca das capacidades de resolução de problemas do seu grupo eram elevadas, apesar de não se considerar boa aluna em Matemática como referiu na entrevista.

Daniel e Sara não entendiam a dúvida de Bela, mas respondiam-lhe com confiança: "Come. A cabra come couve."

A certa altura, Daniel relembrou os colegas das excelentes notas que já tinha tido este ano e o Tomás ainda não, talvez numa tentativa de ganhar popularidade no grupo, um estatuto que ele já adquiriu também na turma.

Quando Ana se aproximou, verificou que Daniel insistia na ideia de levar uma das coisas de cada vez, deixando-as afastadas como sugeria anteriormente, então, pediu-lhe que explicitasse, por escrito o que tinha no seu desenho, tentando que ele reflectisse e raciocinasse um pouco mais:

> Daniel- Eu já fiz isto!
> Bela- Olha, mas nós pusemos um em cada parte.
> Daniel- Sim , estão os três afastados, mas o lobo está lá para proteger a couve e a couve está lá para proteger...
> Prof.ª- Daniel, explica por escrito o que tens no teu desenho, se faz favor. Expliquem como fizeram, para se perceber melhor. Quem passa 1.º? Quem ficou na outra margem? Que fez o camponês quando passou o 2.º?

Mas, vendo que os alunos persistiam com a mesma ideia, com excepção de Tomás que se mantinha observador, a professora acabou por lhes perguntar se eles já tinham verificado o resultado, orientando-os para a última fase do modelo proposto por Polya. Contudo, só Daniel respondeu às questões que eram colocadas.

> Prof.ª- Digam-me, já verificaram o resultado? Quer dizer, já analisaram bem todos os passos do problema para ver se obedecem ao que se diz no problema? A forma como

estão a pensar, resolveu o problema do camponês que queria as suas coisas juntas na outra margem?
Daniel- Mas aqui não diz o que eles querem descobrir!
Prof.ª- Não? Então lê de novo a história.
Daniel- Mas nós já pusemos a cabra ali!
Prof.ª- E o que é que o camponês pretende?
Daniel- Ele quer passar os três para o outro lado e não quer que se comam uns aos outros.

A certa altura, preocupada, Ana procurou que não desanimassem e sugeriu que experimentassem o problema. Esta proposta tornou-se um perfeito enigma para este grupo. Parecia que nunca tinham experimentado simular um problema matemático ou uma situação imaginária. Nesta altura, a professora teve um papel muito importante junto do grupo, questionando os alunos de forma intensiva. "Como é que a gente experimenta as coisas?" perguntou em determinado momento, não sabendo mais como lhes haveria de sugerir que fizessem de conta que eram personagens daquela história e a vivessem. Veja-se um pequeno exemplo de como foi efectuada a partilha e negociação de significados:

Daniel- Fazendo
Prof.ª- Ahh... fazendo! Então façam!
Bela e Daniel- Mas nós já fizemos, professora.
Prof.ª- Jááá?! E porque é que o fazer é só desenhar?
Bela- Mas...
Prof.ª- Ó minha querida! Quando brincas com bonecas desenhas?
Bela- Não!
Sara- Então como é que eu brinco com o problema?
Daniel- Brincar com o quê?
Prof.ª- Com o quê? De que é que precisavas?
Bela- Com o que é que ia fazer o lobo e a couve e...
Prof.ª- O que fazes com as bonecas?
Daniel- Brincas.
Prof.ª- Então brinquem com o problema! Brinquem com ele!
Daniel- Brincamos como, à apanhada?

A intervenção da professora, aqui, baseou-se essencialmente no apelo dos alunos à acção. No entanto, não foi fácil convencê-los a seguirem a sua sugestão, ainda que recorresse às suas vivências de crianças. Os alunos resistiam à estratégia da simulação do problema, achando que já não eram assim tão pequenos para brincarem e muito menos com um problema. É claro que os alunos não atribuíam o mesmo significado à expressão "brinquem com o problema" que a professora. Por isso, Sara alvitrava "porque é que não vamos escrevendo?", possivelmente porque considerava essa estratégia mais apropriada ao trabalho escolar.

Após o afastamento da professora, Daniel mostrou-se persistente dizendo "da outra vez desisti, mas hoje não vou desistir". Tomás aliou-se a ele, pois Daniel foi o único elemento do grupo a ter consideração por si e a acreditar nas suas capacidades. Essa atitude provocou uma mudança de procedimento ou de representação da tarefa e na sua cabeça sucedeu como que uma ideia luminosa:

Tomás [efusivamente]- Já sei!
Daniel- Então diz lá...
Sara- Agora é que tu despertas?
Tomás- Primeiro levava a cabra. Depois levava o lobo e trazia a cabra. Metia a cabra à beira [mal pronunciado] e levava a couve.

Tinham passado cerca de 45 minutos desde o início da resolução em grupo e Bela e Sara continuavam a dirigir-se a Tomás com sarcasmo, revelando uma certa má vontade em aceitar que ele estivesse certo. E, mesmo quando Daniel se prontificou a explicar-lhes, ninguém reparou que o que ele dizia não era a solução encontrada por Tomás, mas outra solução:

Sara- Ham???
Daniel- Isso mesmo! Ele é esperto pá!
Sara- Eu não percebi nada!
Bela- Nem eu!
Daniel- Ele disse assim, olha [para a Bela] ele primeiro levava a cabra, depois levava a couve e trazia a cabra. Depois levava o lobo e depois vinha e levava a cabra.
Sara- Não percebi nada! [riu]
Bela- Ó Daniel, explica lá isso melhor!

Daniel interagia com Tomás batendo carinhosamente com a sua mão na cabeça do colega e dizia "esperto!" e Tomás sorria discretamente. Depois desse momento, Tomás parece ter adquirido mais confiança em si mesmo e chamou pela professora, distribuindo a glória pelo grupo ao dizer "professora, descobrimos!".

"Escrevam-me isso tudo aí no papel. Não apaguem nada.", foi esta a primeira reacção de Ana. Mas, depois de ter sabido que tinha sido apenas através de uma ideia de Tomás, Ana procurou que todos os outros percebessem e procedessem à verificação da solução do problema.

O grupo só conseguiu avaliar a resposta de Tomás através da experimentação quando foram encorajados a fazê-lo e levados a relembrar alguns assuntos aprendidos noutras áreas curriculares. Assim, considerava Ana, poderiam vir a compreender a estratégia sugerida e, posteriormente, o problema:

Prof.ª- Qual é o órgão do sentido que usam para experimentar alguma coisa?
Sara- As mãos...
Prof.ª- O tacto! Experimentem. Experimentem. Com o tacto [mostra as suas mãos]. Ponham as vossas mãos.

Percebia-se forte resistência dos alunos à experimentação e ao uso do próprio corpo:

Prof.ª- Ponham as vossas mãos. Com as vossas mãos vão experimentar isso.
[Os alunos preparavam-se para escrever]
Prof.ª- Mas não é no papel. Virem o papel ao contrário. Pousem o lápis agora. As mãos em cima da mesa. O que é que eu ponho aqui nas minhas mãos para eu poder experimentar esta história?

Ana era persistente e objectiva:

Tomás- O camponês...
Prof.ª- Como é que eu vou pôr aqui as personagens? Vá Tomás, põe aí nas tuas mãos um camponês.
Bela bate com uma mão na outra e diz «ponho»
Prof.ª- Não o vejo, está zero. Não vejo aí nada!. Põe aí um camponês! Escolhe um camponês!
[Ao mesmo tempo os alunos pegam num objecto e colocam-no nas mãos.]
Prof.ª- Pronto já está aqui um camponês [tira o lápis das mãos de Daniel]. Sara, escolhe outra personagem.

Quando Ana os deixou nesse trabalho de verificação, Daniel tomou a chefia do grupo. Brincou com os objectos, mas não se pode dizer que o grupo examinou a solução obtida ou verificou o raciocínio reflectidamente. Pois, muito rapidamente, disse: "a cabra está aqui. Dá cá a couve, levo a cabra. Agora vou buscar o lobo e depois a cabra".

Seguiu-se o momento da resposta escrita que mereceu o parecer de todos. Sara num gesto de simpatia disse que Tomás tinha pensado e elas escreviam. No entanto, Bela precisava da ajuda de Tomás para lhe ditar a resposta e ele mostrou ter uma baixa expectativa em relação a si próprio e à sua capacidade para comunicar oralmente e por escrito, desculpando-se com as boas capacidades de comunicação de Daniel, valorizando-o:

Bela- Diz lá a tua ideia Tomás.
Tomás- O Daniel explicou melhor do que eu.
Bela- Diz lá ...
Tomás- O Daniel explicou melhor!

Bela afinal, não compreendeu a solução encontrada por Tomás e como este insistiu em não lhe dizer a sua ideia, ela foi obrigada a copiar por Sara.

A partir desse momento o grupo começou a preocupar-se com a apresentação dos seus resultados à turma. Daniel propunha que fosse um dos outros três a ir "apresentar". Bela também não desejava esse papel, pois afirmava que não tinha percebido, deixando para Tomás essa função, por ter sido ele quem encontrou o caminho. Sara concordava. O diálogo que se segue evidencia a pouca vontade dos alunos em explicarem um raciocínio para o qual sentiam não ter dado nenhuma contribuição:

> Daniel- É um de vocês os três que vai apresentar.
> Bela- Eu não, nem percebi nada! O Sr. Sabichão [apontando para o Tomás] é que sabe tudo!
> Sara- Vai o Tomás! Ele é que teve a ideia!

Daniel adoptou uma atitude contrária à que referiu na entrevista onde dizia gostar de explicar oralmente como resolveu um problema, talvez porque sentiu que não foi ele quem o resolveu. No entanto, sugeriu que representassem iconicamente a experiência e adiantou aos colegas que teve "sete coisas a fazer só para levar as três" (ver Figura 3), referindo-se ao número de viagens que o camponês teve de fazer para transportar o lobo, a cabra e a couve para a outra margem, nas condições referidas no enunciado do problema.

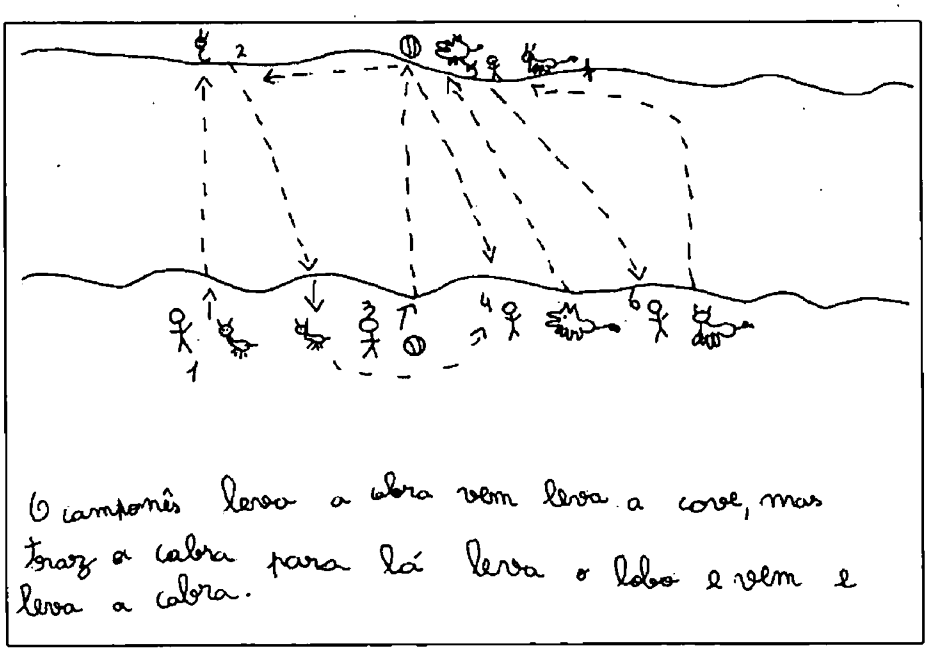


Figura 3 – Registo de Daniel representando as viagens do camponês.

Tomás foi o único que seguiu a sugestão de Daniel e registou também a resolução deste problema (ver Figura 4).

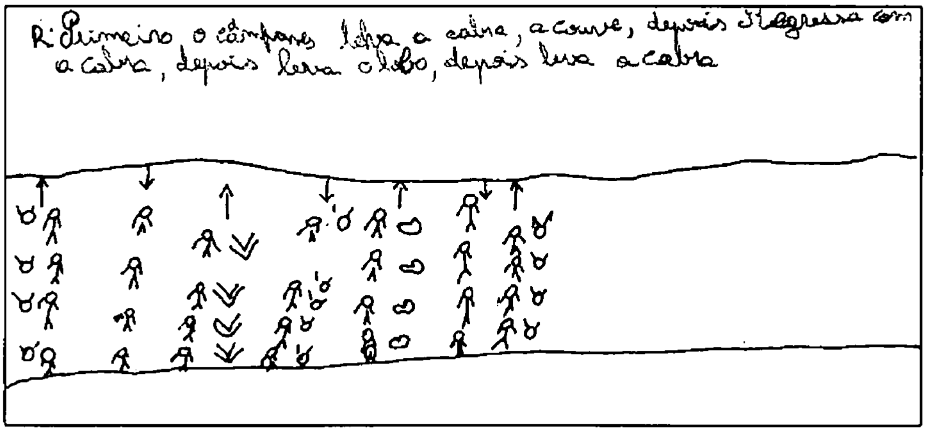


Figura 4 – Registo de Tomás representando as viagens do camponês.

Estava encontrada uma resposta para o problema colocado.

3.ª parte da actividade: comunicação à turma dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo

Nesta última parte da actividade pedagógica, Ana geriu toda a situação didáctica. Ela interrogou os alunos com a intenção de sintetizar o trabalho de cada grupo e de dar a conhecer um modo diferente de obter respostas para os problemas, mas teve também a intenção de validar as afirmações dos alunos e ainda de tornar mais claras as suas declarações.

Todos os grupos tinham precisado de acção, de teatro, enfim, de concretizar para entender o problema, mas segundo Ana me confessou, continuavam sem o perceber.

Inquiridos sobre o que tinham precisado para "solucionar esta história", os alunos não se mostraram muito seguros do que tinham feito, como evidenciam os diálogos:

Prof.ª- Bela, de que precisávamos para resolver este problema?
Bela- Do tacto. Para nós desenharmos aqui a professora mandou-nos fazer.

Prof.ª- Então, de que precisavas para solucionar esta história, dar um fim a esta história? Um fim em que ninguém se comesse!
Bela- Dos personagens.
Prof.ª- Precisavas dos personagens. E tu Jorge de que precisavas para dares um fim a esta história?
Jorge- ...[não respondeu]

Ana procurava que entendessem a dramatização como uma estratégia de resolução de problemas, e, por isso, interrogava os alunos para confirmar que o seu objectivo tinha sido alcançado. Por exemplo, Mara levantou-se e repetiu o que tinham feito com o material em cima da mesa. Mas, o verbo *levar* era usado por ela para significar levar e trazer. Foi preciso partilhar esses significados que poderiam constituir um obstáculo à compreensão de quem ouvia:

Prof.ª- Então vocês experimentaram. Foi por tentativas! Isto é experimentar! Mas atenção que uma coisa é levar e outra coisa é trazer! Estás a trocar os verbos! Levar é levar e trazer é de volta! Está bem? Agora, mostra de novo como fizeram, mas com os verbos certos. Primeiro: levou.
Mara- O camponês levou a cabra. Depois levou a couve. Depois trouxe outra vez a cabra e levou o lobo. E depois ele levou a cabra.

Para terminar, proporcionámos aos alunos a oportunidade de dramatizarem o problema. Independentemente da formação dos grupos de trabalho, Ana solicitou a três alunos que participassem nesta representação já que tínhamos uma couve realmente presente. Assim, cada aluno escolheu a personagem que queria desempenhar e colocou um adereço que previamente tinhamos seleccionado. A aluna que fez de camponês, mostrou-se muito indecisa e inibida, precisando do incentivo da professora, da ajuda da turma e das outras duas personagens para iniciar o processo:

Prof.ª- Vá agora acção! A tua função é levar os três que te pertencem, são teus, para a outra margem, sem que nenhum coma...o outro e....
Camponês- Então tenho de começar por...
Vários alunos- Vá... não fales... leva!
Camponês- Mas não posso levar todos de uma vez!
Um aluno- Leva aquele que tu quiseres!
Prof.ª- Experimenta. Experimenta!

Afinal, dependiam dela todas as decisões. E sem se ter apropriado da personagem que estava ali a desempenhar, a aluna escolheu o lobo para levar primeiro. A que fazia de cabra reagiu imediatamente e, na sala, uma das outras colegas ajudou:

Cabra- Mham, mham!

Mara- Não!... primeiro levas a cabra para o outro lado!
Camponês- ?...
Prof.ª- Porquê?
Mara- Porque se ela fica sozinha com a couve, ela come a couve!
Prof.ª- Não tenhas problemas. Pega-lhe no braço e leva-a.

A execução de um plano que não tinha sido estabelecido por esta aluna, estava a ser compreendido com a ajuda e convencimento do outro. Ela aceitava o contributo dos colegas. Contudo, a dada altura viu-se confrontada com duas ideias que durante a resolução em grupos tinham sido a dificuldade maior da resolução deste problema. Primeira: levar a couve ou o lobo em segundo lugar? Segunda: nenhum dos outros pode ficar ao lado do que foi levado primeiro. Este mostrou-se afinal um raciocínio complexo:

Manuel- Agora vai buscar a couve.
Camponês- Não, não, vou buscar o lobo...
Prof.ª- Porquê?
Camponês- Senão a cabra come a couve.
Manuel- E se levar o lobo, é a cabra que é comida pelo lobo!

Ana deixou que os alunos explicitassem os seus pensamentos, pois ambos estavam certos e esperou que os alunos chegassem à conclusão de que ambos raciocinavam correctamente. Assim, os alunos colocaram dúvidas relacionadas com a validação que a professora tinha feito às suas resoluções em grupo:

Manuel- Professora, nós primeiro levámos a cabra e em segundo levámos a couve!...
Júlio- E nós também levámos a cabra em primeiro mas em *segundos* levámos o lobo!
Prof.ª- Então o melhor, para verificarmos o que se passa, é experimentarmos de uma maneira e de outra.

Percebia-se que as crianças estavam um pouco dependentes da validação da professora, ficando de novo mais tranquilas quando a recebiam.

A aluna camponês pegou então na mão do lobo e levou-o até junto da cabra. E, enquanto o lobo se preparava para fingir comer a cabra, os pequenos olhos da aluna camponês encheram-se de luz. Tinha descoberto que não podia deixar ali os dois sozinhos. Enquanto isso, alguns alunos do grande grupo gesticulavam e diziam "traz a cabra, traz a cabra".

Continuava a ser um processo difícil para esta criança, pois, de novo, via a cabra a ameaçar a couve, e, num gesto irreflectido, pegou na couve afastando-a da cabra ao mesmo tempo que os outros a ajudavam dizendo: "leva-a para junto do lobo". O camponês estava na fase final da sua travessia e calmamente levou a cabra para o outro lado ficando lá também.

Seguidamente, outros alunos experimentaram levar a couve em segundo lugar, tal como tinha combinado com a turma. O aluno ia explicitando o seu raciocínio, dando a entender que percebeu todo o processo:

> Manuel- Então, levo a cabra, não é? Agora volto e vou buscar a couve. Mas, se deixar os dois neste lado, a cabra come a couve, então tenho de levar a cabra de volta.
> Prof.ª- E agora, Manuel?
> Manuel- Agora deixo-a outra vez nesta beirinha e levo o lobo para lá. Deixo o lobo com a couve e vou buscar a cabra. Agora levo a cabra e pronto já estamos todos na outra margem.

Ana sorria. Notava-se nas crianças um certo cansaço acompanhado de bem estar. Este desafio estava vencido e resultava em ganhos cognitivos para elas, mas também num certo orgulho para Ana.

Comentário global

Com esta tarefa, pretendia-se tornar a resolução de problemas um processo agradável e desafiador para todas as crianças. E, tendo em conta a opinião dos alunos isso verificou-se. Contudo, o problema não se mostrou tão acessível quanto julgávamos. Pois, quando foi solicitada a opinião sobre a estratégia que poderia resolver o problema, as crianças davam a entender que a simulação ou dramatização da situação apresentada era uma novidade para si. Todos os grupos planearam representá-lo através do desenho, mas isso não lhes permitiu chegar, autonomamente, além da ilustração do enunciado.

O ambiente da sala de aula revelou-se um ambiente calmo, em que as crianças cumpriram ordenadamente a tarefa proposta pela professora.

Ana procurou desenvolver uma atmosfera de resolução de problemas em que os alunos colocassem as suas questões e incertezas e fossem apoiadas por ela na verbalização dos seus significados. Frente à turma, Ana geriu toda a situação, originando deste modo um diálogo pergunta-resposta em que ela actuou num modo afirmativo, tornando mais claras afirmações anteriores ou validando as afirmações dos alunos.

Em situação do trabalho de grupo, Ana interagiu com os alunos pedindo-lhes explicações e questionando-os, tentando perceber o que estariam eles a pensar sobre a tarefa que lhes tinha sido proposta, encorajando-os a comunicar e a escutar as explicações do outro, num verdadeiro trabalho cooperativo. Primeiro através da oralidade, explicando que estratégia usariam e depois da linguagem corporal, todos puderam explicar como poderiam ter obtido uma resposta para o problema. Neste caso, o papel da professora foi fundamental para ajudar os alunos a falarem sobre as suas ideias. Também se podem observar na segunda e terceira parte da actividade algumas perguntas de inquirição que levaram os alunos a explicitar o seu raciocínio.

Durante a sua actividade, os alunos tiveram a possibilidade de se envolverem em diversos processos matemáticos. Resolver o problema, por si só, constituiu um processo de elevada complexidade que incluiu comunicar, representar, reflectir, avaliar e criticar as condições do problema. As crianças, ao lidarem com uma situação que contemplou a actividade lúdica, aprenderam a utilizar a dramatização como estratégia de resolução de problemas, já que, como se referiu, essa não era uma estratégia do seu conhecimento. Em relação ao trabalho em grupo, puderam também dialogar uns com os outros sobre os seus pontos de vista, negociando significados e procurando uma solução para o problema através da simbologia pictórica criada por eles ou, mais particularmente, por Daniel e Tomás no caso do grupo em foco. Esses símbolos permitiram aos alunos abreviar os nomes dos animais e da couve e facilitar outra estratégia de resolução de problemas, o desenho.

Em relação ao trabalho do grupo em foco, observa-se que enquanto Tomás se manteve passivo, sem ideias próprias, as interacções entre os seus elementos mantiveram-se estáveis. De contrário, quando Tomás sentiu necessidade de testar individualmente o seu raciocínio, Bela e Sara encararam isso como uma rivalidade e geraram-se conflitos. Valeu-lhe a atitude positiva de Ana que o incentivou a verbalizar o pensamento. Durante a observação da sessão não foi possível verificar se esse conflito é anterior a esta aula ou não.

Quanto às interacções aluno-aluno, verificaram-se em maior número na segunda parte da actividade, havendo também uma tentativa de interacção horizontal no final da primeira parte. Na terceira parte da actividade estabeleceram-se interacções de encorajamento entre os alunos que permitiram encontrar uma solução para o problema.

Durante toda a actividade, a comunicação oral ocupou o primeiro lugar na eficácia das interacções. A comunicação escrita apenas teve lugar numa fase final de resposta ao problema e só o grupo em foco conseguiu fazê-lo de forma completa.

Relativamente às fases de resolução do problema, em geral, todas foram etapas demoradas em que os alunos se envolveram em importantes processos de raciocínio, de comunicação e de trabalho. Pode dizer-se que a primeira ou da compreensão do problema foi iniciada na primeira parte da actividade pedagógica, quando em trabalho colectivo os alunos foram encorajados a interpretar as condições do problema e a raciocinar sobre elas, prosseguindo depois nos grupos.

A segunda fase ou do estabelecimento do plano, foi iniciada também na primeira parte da actividade quando aos alunos foi dada a oportunidade de enumerarem estratégias que os conduzissem à resolução do problema, continuando depois na segunda parte quando os alunos trabalhavam em grupos.

A terceira ou da execução do plano ocorreu quando os alunos trabalhavam em grupo tornando-se difícil distingui-la da fase anterior; nesta fase os alunos interagiram entre si partilhando as suas ideias e negociando o significado dos seus símbolos. As interacções verticias ocorridas nesta fase da resolução procuraram que os alunos explicitassem os seus pensamentos, incentivando o grupo à reflexão e à verificação dos resultados. As questões mais colocadas foram as de inquirição e as de focalização para ajudarem os alunos a encontrar o caminho até uma solução.

A quarta fase ou da verificação do resultado, começou por acontecer também durante a segunda parte da actividade, com o incentivo da professora. Daniel assumiu aqui a iniciativa do registo da resolução do problema, desenhando os passos dados pelo camponês sem que os colegas se manifestassem contra. Esta última fase continuou na terceira parte da actividade onde foi efectuada uma verificação colectiva que permitiu aos alunos que não tinham percebido o problema através da simulação com objectos, compreendê-lo através da dramatização. Nesta parte da actividade, Ana geriu toda a situação didáctica, interrogando os alunos um de cada vez, sintetizando as ideias acerca da estratégia usada. Na globalidade, poder-se-á dizer que a fase da verificação dos resultados foi aquela em que os alunos demonstraram menos iniciativa, até chegarem à dramatização, que os mobilizou bastante.

Após a sessão, Ana revelou-me, informalmente, que os alunos não tinham compreendido o problema e, por isso, sem a sua ajuda não teriam conseguido chegar a uma resposta. Esta percepção de Ana está de acordo com a maioria das opiniões dos alunos que refere que o problema foi difícil mas também muito divertido. Parece-me que a dificuldade maior esteve na aceitação das condições do problema que pareciam distanciar-se das questões da realidade que as crianças conhecem. Pois, que situação estranha era essa em que um barco é tão pequeno que não permite levar uma couve ao colo de um camponês e ainda dois animais como o lobo e a cabra? Ou, que relação existe entre um camponês e um lobo? Ou ainda, que tamanho terá a couve para ocupar assim tanto espaço dentro de um pequeno barco? Ou mesmo, sendo o homem mais inteligente que a cabra, não a consegue enganar escondendo a couve?

Ana afirmou ainda ter procurado sempre a participação de todos os alunos no processo, considerando ter "puxado" por Tomás que é muito pouco comunicativo. Mas, sentiu como grande dificuldade para a resolução do problema o facto de que Bela "não levava a parte do experimentar a sério" e manifestava uma certa "má vontade" para com Tomás. E ela, como professora, não sabia explicar a razão de tal comportamento. Confessou-me ainda que "uma actividade deste tipo cansa" (notas de campo), por exigir que se esteja atenta ao desenrolar da actividade de cada grupo de trabalho e do pensamento de cada aluno.

2. *Acerto de contas*

1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma

À semelhança da sessão anterior, esta aula iniciou-se de forma calma. A professora geria completamente a situação didáctica e os alunos participavam, consoante eram solicitados.

A aula de resolução de problemas iniciou-se relacionando a época de Natal que se atravessava com o problema que os alunos teriam de resolver, aproximando-o assim das questões do dia a dia das crianças.

Primeiro, a professora leu o problema (ver Quadro 3.2) em voz alta e, em seguida, solicitou a três alunos que o fizessem, à vez. Mas, como ninguém se ofereceu, colocou então algumas questões de interpretação do problema aos alunos com o intuito de verificar se o mesmo tinha sido por eles compreendido:

Prof.ª- Flávio, a história tem três personagens, não é?
Flávio- A Rita, a Sofia e a Catarina.
Prof.ª- Jorge, o que é que essas personagens pretendem?
[A professora esperou cerca de 30 segundos e passou ao Pedro]
Pedro- Fazer uma festa.

e ainda com a intenção de partilhar significados de expressões menos usuais para os alunos como "o que é isto de acertar as contas".

Nesta parte da actividade pedagógica, a professora promoveu a aprendizagem validando as afirmações dos alunos:

Prof.ª- Alguém tinha reparado nisto: partilhar igualmente as despesas? O que é isto, Daniel?
Daniel- Partilhar é pagar a mesma coisa...
Prof.ª- Ouviram o que ele disse? Partilhar é pagar a mesma coisa.

explicando melhor:

Daniel- É dividir...
Prof.ª- É dividir como?
Daniel-Igualmente à outra.
Mara- Cada uma paga a sua parte e as outras dão o resto. Igualmente uma à outra,
Prof.ª- Uma paga igualmente à outra, é isso?

ou ainda procurando sintetizar ideias:

Prof.ª- Então, eu volto a perguntar: o que é partilhar igualmente as despesas?
Mara- É dar o dinheiro... é dar tudo igual.
Prof.ª- É contribuir... como?
Mara- Igualmente
Prof.ª- Partilhar as despesas é contribuir igualmente, de forma igual nas despesas.

Para ajudar os alunos a estabelecerem um plano de resolução para o problema, a professora procurou apresentar, oralmente, um segundo problema, análogo ao primeiro, mais acessível e com o qual as crianças se pudessem identificar por estar ainda mais próximo da sua realidade ou do seu dia a dia:

Prof.ª- Agora pensa nisto: vais comprar uma cartolina, com a Mónica e com outra tua amiga ... a Mara. A cartolina custa por exemplo 1 euro e meio. A Mara dá meio euro, estás a ouvir Sandra? a Mónica dá 80 cêntimos e tu dás 20 cêntimos. Faz 1 euro e meio. A compra da cartolina foi partilhada igualmente pelas 3?

Durante as interacções que estabeleceu com a turma, a professora incentivou sempre a participação de todos os alunos, fazendo respeitar a ordem das intervenções:

Daniel- N...
Prof.ª- Deixa-a falar, se fazes favor.
Sandra- Não.
Prof.ª- Porque é que tu achas que [a despesa] não foi [partilhada]?
Sandra- porque o dinheiro [que cada uma dava] não era igual.

Parece que o significado da expressão "partilhar igualmente as despesas" foi entendido, porém como se acertam as contas, não. A professora procurou que todos os alunos entendessem que "acertar as contas", neste caso, compreendia três situações. Primeiro uma situação aditiva que combina três quantidades (gastos individuais), calculando o total das despesas; depois uma situação de divisão como partilha em que essa quantidade total é igualmente partilhada pelas três intervenientes, para se saber que despesa deveria ser feita por cada um; e, finalmente, como uma situação subtractiva em que se pretende determinar quanto é que se deve juntar à despesa de cada um (que pagou menos) para se obter o valor obtido na situação de divisão e que será dado a quem pagou mais. É essencial compreender essa estrutura, pois ela acontece no nosso dia a dia. No entanto, ela é uma situação muito complexa para as crianças, como evidenciam os diálogos acerca do problema análogo:

Prof.ª- Então, isto não foi partilhar igualmente! Se fossem comprar a cartolina...
Um aluno- 50 para cada uma.
Prof.ª- 50 cêntimos a cada uma. 50 ali, 80 ali e 20 ali, quando saíssem da papelaria tinham que acertar...
Vários alunos-... As contas
Prof.ª- E o que era acertar as contas? O que é acertar as contas, Mara?
Mara- Eu e a Sandra dávamos 80 igual à Mónica.

Ao mesmo tempo, o conhecimento que a professora tem da competência matemática da aluna leva-a a saber o que a mesma precisa:

Prof.ª- Se tu desses 80, se cada uma desse 80, em quanto é que ia ficar a cartolina? Faz lá a conta: 3 conjuntos de 80.

Por isso, deu-lhe reforço positivo quando percebeu a sua dificuldade de cálculo, dizendo-lhe, quase em segredo, que ela sabia a tábua do 3. Mas Mara preferiu fazer uma adição de parcelas iguais (80+80), depois outros alunos foram segredando 240. Acabando por concluir que, assim, o preço da cartolina não seria o mesmo.

Um dos factores que interferiram na resolução deste problema foi sem dúvida a forma como os alunos usam a Língua Portuguesa para comunicar os seus pensamentos.

Este aspecto foi entendido do mesmo modo pela professora que, durante o processo, fez ver aos alunos que muitas vezes eles têm ideias e o seu raciocínio pode estar correcto, no entanto, a sua explicitação não é sintacticamente correcta:

> Prof.ª- Porque motivo é que elas [as contas] não estavam acertadas, Jacira?
> Jacira- Porque o dinheiro não era todo igual.
> Prof.ª- O dinheiro não era todo igual, quer dizer, o dinheiro que cada uma ... deu, não era igual. Então o que é partilhar igualmente as despesas?
> Jacira- É dar tudo igual.
> Prof.ª- O português é que não está nada bem. É dar tudo igual?! É contribuir igualmente nas despesas...

Para fazer a transição para o trabalho de grupo, Ana fez a associação do problema semelhante que criou na aula com o problema original:

> Prof.ª- Então, a situação da Sandra da Mara e da Mónica não podia ser a situação destas 3 meninas? Agora em grupo, debrucem-se sobre isso. Mas reparem na situação da Sofia, da Rita e da Catarina e tentem ajudar as meninas a resolverem esta situação da festa de Natal! Podem começar.

2.ª parte da actividade: resolução do problema pelo grupo em foco

Pela postura de cada um dos elementos do grupo percebia-se que tanto Daniel como Tomás eram os alunos mais interessados em resolver o problema. Contudo, Daniel foi o primeiro a verbalizar a sua ideia:

> Daniel- Eu já sei como é que vai ser, pelo menos tenho uma ideia. Eu acho que é assim: quando a Catarina tivesse dinheiro dava 2 euros e meio à Sofia e quando a Rita tivesse dinheiro dava 2 euros e assim tinham dado as duas o mesmo.

Daniel que, na primeira parte da aula, tinha mostrado perceber o que significava "partilhar as despesas", entendia agora o acerto de contas de dois modos. Esperava apenas poder colocar esses seus pontos de vista à consideração de outros elementos do grupo, tão competentes como ele em termos de raciocínio e competência matemática. Mas tão preocupado estava em ser ele a apresentar uma solução que não deixou Tomás expor a sua ideia, acabando por reflectir sobre o seu pensamento e detectar alguns erros no seu modo de pensar:

> Tomás- Não têm que ter as duas o mesmo dinheiro. Eu acho que é assim...

> Daniel- Já sei como é que tu queres: 50 cêntimos p'rali e 1 euro p'rali, mas o bolo, lembraste que é 6 euros e 50, os sonhos é 4 euros e 50 e as batatas fritas é 4 euros, está bem Tomás? Está aqui não podes apagar...compra batatas fritas com 5 euros e sobra-lhe um euro e depois essa vai pagar o bolo e falta-lhe 2 euros e meio, não, 1 euro e meio. E quando tivessem dinheiro acertavam as contas, quando essa [a Catarina] tivesse mais 2 euros dava à Sofia e quando a Rita tivesse mais 2 euros pagava à... ai não, assim ela fica com muito dinheiro!

A maior parte das intervenções de Bela foi apenas para ironizar sobre a competência de Tomás, como por exemplo: "agora vamos ver se já tens alguma ideia, Tomás...".

E Sara, que na entrevista tinha revelado preferir "... daqueles [problemas] que têm números..." porque, dizia ela, ficava "...a saber mais alguma coisa.", perante este problema numérico dizia "fazemos uma conta de vezes", dando a entender que vê os problemas matemáticos como uma aplicação das operações aprendidas, sem a compreensão das mesmas.

Foi entre Daniel e Tomás que se verificaram interacções que assentavam na negociação recíproca em que um procurava convencer o outro:

> Daniel- Mas se ela [Sofia] vai dar o dinheiro a estas [Rita e Catarina], ela vai gastar dinheiro!
> Tomás- Não sei mas ficam todas com o mesmo dinheiro.
> Daniel- A Sofia fica sem dinheiro, não é? Fica com um euro e meio a menos e não fica contente.
> Tomás- Quem?
> Daniel- A Sofia. A Sofia vai comprar um bolo por 6 euros e meio e estás a dizer para dar 50 cêntimos à Rita e 1 euro à Catarina!

Daniel continuava a raciocinar sobre o problema e Tomás, que estava a ficar confuso, sugeriu que usassem a estratégia eficaz na resolução do problema *O lobo, a cabra e a couve*, ou seja a dramatização ou simulação do problema:

> Daniel- Eu também estava a pensar como o Tomás, mas depois pensei que elas tinham de pagar aquilo tudo.
> Tomás- Não te lembras do que a professora disse... para experimentarmos?

Pegaram então em objectos escolares e e atribuiram-lhe os valores falados no texto, associando-os ao tamanho. Estava a ser posta em prática uma estratégia que tinham aprendido recentemente e, embora ainda não houvesse muita experiência, isso trouxe alguma luz a Tomás que disse logo "agora temos de dividir igualmente".

Sara, por outro lado, tentava sugerir a multiplicação, como uma saída a todo o custo para esta situação de impasse pela qual passavam, revelando desta forma não possuir o sentido da multiplicação, ao contrário de Daniel e de Tomás:

Sara- Fazendo uma conta de vezes não se chega lá a lado nenhum sequer?
Daniel- Para quê a conta de vezes?
Sara- Não sei! Uma coisa qualquer!
Daniel-Tens de ter uma ideia! Quando disseste fazer uma conta de vezes devias ter uma ideia!...
Tomás- Vezes não. Dividir! Somamos isto e depois dividimos!

Ao ouvir Tomás, Ana aproximou-se do grupo e incentivou-o a explicitar o seu raciocínio, de forma a torná-lo mais claro para os restantes elementos do grupo e para que ele próprio reflectisse sobre as suas ideias.

A professora inquiriu-o, solicitando-lhe justificações, no entanto, Tomás que raciocinava correctamente tinha dificuldade em explicitar esse raciocínio:

Prof.ª- Primeiro: somas tudo para quê?
Tomás- Para ver quanto é que dava e depois dividia.
Prof.ª- Para veres quanto é que dava de quê?
Tomás- Para ver quanto é que elas tinham.
Prof.ª- Para ver quanto é que elas tinham?
Tomás- O que tinham juntas. Para depois dividir por 3 para ver o que tinham juntas.
Prof.ª- Então quando dividias por 3 era para saber o quê?
Tomás- Para ver quanto dinheiro tinham para as 3.

Tomás estabelecia o plano de resolução para aquele problema, era capaz de o executar, mas não conseguia verbalizar o seu raciocínio.

A professora teve a preocupação de não excluir nenhum aluno dos diálogos daquele processo revelando conhecer bem as competências e capacidades de cada um e, para tal, valia-se de uns para solicitar aos outros que se explicassem:

Prof.ª- concordas com o que ele está a dizer Sara, percebeste?
Sara- Não.
Prof.ª- Repete Tomás que a Sara não te entendeu.
Tomás- Eu somava isto.
Prof.ª- Sara, sabes porque é que ele ia somar?
Sara-Não.
Prof.ª- Diz de novo Tomás.
Tomás- Para ver quanto tinham as 3 juntas.
Prof.ª- Bela, para que nos serve saber quanto é que tinham as 3 juntas?

Percebia-se que Daniel se sentia um aluno muito popular nestas aulas e não lidava bem com o facto de Tomás ter tido o raciocínio mais rápido. Daí que, por vezes, tivesse adoptado uma postura mais egocêntrica, interagindo pouco verbalmente.

Na sequência da dificuldade de Tomás em verbalizar as suas ideias, a professora propôs-lhe um problema semelhante, mas mais específico e acessível de modo que ele se explicitasse sobre o sentido da divisão que tinha referido. Ao mesmo tempo, tentava que todos os alunos participassem, mesmo os que pareciam desmotivados no momento, como Daniel. Ele era como que a tábua de salvação:

> Prof.ª- Repara [Tomás], quando divides este material por 3, como fazes?
> [Tomás dividiu 3 lápis pelos 3 colegas]
> Tomás- Cada um fica com 1.
> Prof.ª- Então, neste caso, o que ficaste a saber quando divides o material por 3? Daniel, ajuda-nos!
> Daniel- Fica a saber quanto ficou para cada um.

Ana mostrou-se atenta à necessidade dos alunos registarem as suas ideias conforme elas iam surgindo, assim como com as atitudes individualistas dos alunos:

> Prof.ª- Bom... então agora registem o que acabaram de me dizer! Para depois acertarem as contas. Mas, eu já estou a ver que o Daniel tem alguma coisa registada. O que é Daniel?

E, do mesmo modo, apelava à verificação dos resultados sem os validar expressamente:

> Daniel- Somei todo este dinheiro e deu-me 17 , depois dividi pelas 3.
> Prof.ª- Deu 17? Confirma lá!

A certa altura Sara também sentiu necessidade de registar todos os passos da resolução do problema:

> Sara- Então devíamos ter feito primeiro a conta de mais e depois é que fazíamos a de dividir!

Notou-se que, após o afastamento da professora, Sara e Bela se revelaram mais dependentes de Daniel, conferindo assim, ao colega, um nível de competência superior ao seu:

> Bela- Parece que não percebi nada.
> Sara- Ham?! [em simultâneo com Bela]
> Bela- Não é para somar esta coisa toda?

Sara- E os 4 euros onde é que metemos?

Estas duas alunas ainda não tinham contribuído em nada para a resolução deste problema. Também Daniel, quando lhe surgiam dúvidas, recorria ao enunciado do problema, numa atitude mais individualista. E Sara, embora dependesse dos colegas mais competentes, mostrou-se sarcástica para com os eles, a ponto de Daniel se questionar:

Sara- Então o que é que é o resultado 5, senhor espertinho [Daniel]?
Daniel- É o que elas têm de gastar para fazer as despesas igualmente.
Sara- Explica isso.
Daniel- Ó pá, a Sara quer sempre que nós expliquemos...

Bela também criticava o trabalho dos companheiros e queixava-se da existência de conflitos no grupo:

Bela- O nosso grupo é o máximo. Até me apetece trocar! É o máximo! Espectacular [ironicamente]. Nem trabalha em equipa nem nada. Que belo grupo!

Enquanto isso, Tomás queria dar a validar à professora os resultados a que tinham chegado e Daniel dava-lhe a entender que primeiro deveriam verificar, em grupo, cada passo, assim como verificar o resultado. Bela brincava com ele, perdendo-se assim em distracções:

Tomás- Vou chamar a professora, já acabámos.
Daniel- Não, que eu não sei se isto está certo!
Bela- Agora nem sabe se está certo! [com ironia, enquanto Sara ri].

Quando a professora se aproximou, de novo, do grupo e mostrou vontade de ouvir todos os raciocínios, Tomás e Daniel continuavam com as suas ideias. A professora remeteu-os para a incógnita do problema:

Tomás- As 3 tinham de ficar com 5 euros.
Prof.ª- O que queremos saber mesmo?
Sara- Como é que as 3 amigas devem acertar as contas?

e estabeleceu com eles um tipo de interacção assimétrica:

Prof.ª- Como é que as 3 amigas devem acertar as contas. Digam-me: elas já fizeram despesas?
Tomás- Sim
Prof.ª- Quanto gastou cada uma delas?

Tomás- A Rita 4 euros e meio, a Sofia 6 euros e meio e a Catarina 4 euros.
Prof.ª- E o que é acertar as contas?
Tomás- É ver o que têm de dar para ficar tudo igual.

A professora procurava confirmar o resultado, verificando o raciocínio e as ideias dos alunos, ao mesmo tempo que lhes mostrava que, neste caso, partilhar as contas exigia acertar as contas:

Prof.ª- Ora bem, então se todas têm de gastar o mesmo e se elas já fizeram despesas, agora têm de acertar as contas.
Tomás- Já acertaram: 5 euros para as 3.
Prof.ª- Já? Vamos ver outra opinião: Daniel lê o que escreveste.
Daniel- A Rita vai ter de pagar 2 euros à Sofia. E a Catarina vai ter de dar 2 euros e meio à Sofia.

Como se depreende, Daniel continuava a entender que o acerto de contas se faz pelo valor mais alto. Ou seja, quem tem mais, dá. Ana sentiu necessidade de ajudar um pouco mais, ou seja, de ser mais objectiva. Essa objectividade traduziu-se numa inquirição da sua parte que ajudou os alunos a clarificarem os seus pensamentos e a corrigi-los:

Prof.ª- Quando a Rita der 2 euros à Sofia, quanto é que passou a gastar?
Daniel- 6 euros e 50
Prof.ª- E foi isso que me disseram: cada uma deve pagar 6 euros e 50?
Tomás- Não. 5 euros
Prof.ª- Então se a Rita lhe dá 2 euros, a despesa dela diminui. A Rita dá-lhe!... e a Sofia passa a gastar quanto?
Bela- Gastou 4 euros e meio.

A professora teve necessidade de pensar alto sobre o raciocínio de Daniel para que os alunos entendessem também o que queria dizer, isto é para ajudar Daniel a clarificar o seu próprio pensamento, reflectindo sobre ele:

Prof.ª- Deixem-me ver se eu entendi: O Daniel diz que a Rita vai dar 2 euros à Sofia e então, passa a pagar 6 euros e meio, mas a Sofia recebe o dinheiro da Rita e a despesa dela já não vai ser 6 euros e meio. Então como vai ficar a sua despesa?
Daniel- Vai ser de 4 euros e meio.
Prof.ª- Assim, as despesas ficam igualmente partilhadas?
Daniel- Não!
Prof.ª- Então, vê lá Daniel ...

Quando chegou a vez de Bela explicar como tinha pensado, Sara mostrou que também ela estava por dentro do raciocínio da companheira e não tão alheias a esta resolução como tinham revelado nos diálogos com os colegas:

Bela- Aqui somei para saber o resultado.
Prof.ª- Como?
Sara- Para saber quanto é que elas tinham ao todo.
Prof.ª- Depois...
Bela- Depois dividi por 3
Sara- Na conta anterior deu 15 e então nós fomos dividir por 3.
Prof.ª- Para saberem o quê?
Sara e Daniel- Quanto é que dava a cada uma.

A ideia de divisão como partilha estava compreendida. E como Ana dizia "agora devem acertar as contas". Então procurou sintetizar o problema, chamando a atenção para os dados, que Daniel rapidamente apresentou:

Prof.ª- Vamos lá ver com atenção quais são os nossos dados.
Daniel- 4 euros e meio da Rita, 6 euros e meio da Sofia e 4 euros da Catarina.

De seguida, Ana, através do questionamento ao grupo, foi dividindo o problema em subproblemas levando os alunos a encontrar respostas intermédias:

Prof.ª- Quanto é que cada uma devia gastar?
Todos- 5 euros.
Prof.ª- E quanto pagou a Rita?
Sara- 4 euros e meio.
Prof.ª- E então?
Daniel- Tem de gastar mais 50 cêntimos.
Prof.ª- E o que é que ela vai fazer?
Daniel- Vai dá-los à Sofia.

E a partilhar os significados:

Prof.ª- Se vai dá-los à Sofia, [a Rita] vai acertar as contas com a Sofia.
Sara- Agora falta a Catarina!
Prof.ª- Concordam? Então é melhor escreverem.

Apesar de todos terem concordado, quando Ana se afastou, Bela e Sara continuaram a mostrar-se dependentes dos colegas para o registo dos primeiros resultados:

Sara- O que é que nós escrevemos?
Bela- E agora temos de escrever o quê?

Daniel leu em voz alta o que escreveu, dando assim resposta às duas colegas.

Destas atitudes, pode entender-se que também Bela e Sara consideram Daniel o melhor resolvedor ficando, por isso, muito dependentes da sua decisão. Tanto é que a qualquer esforço pedido pela professora uma e outra respondiam, com algum desinteresse, como evidenciam os diálogos:

Bela- Então agora a Catarina vai ter de dar também, 50 à Sofia.
Prof.ª- Então...olhem bem para os dados do problema!
Sara- Não sei, já olhei, mas não sei.
Prof.ª- Então diz-me lá, porque é que ela dá 50 cêntimos à Sofia?
Sara- Sei lá!

A professora esforçava-se por apoiar o pensamento de Bela e de Sara, sintetizando, tornando mais claras as suas afirmações, pedindo explicações de forma a fazê-las reflectir sobre as suas ideias:

Bela- A Catarina vai ter dar 50 cêntimos à Sofia.
Prof.ª- É? Porquê?
Bela- Então... ela vai gastar 4 euros...
Prof.ª- É?
Sara- Não, 5 euros!

Observa-se ainda que a professora reforçava positivamente a participação das alunas elogiando o esforço dispendido:

Sara- Então a Rita e a Catarina têm de dar à ...Sofia...Elas gastaram menos mas a Sofia gastou mais.
Prof.ª- Muito bem. Deixa-me ver se eu percebi: a Rita e a Catarina têm de dar dinheiro à Sofia, porque ela é que gastou mais.

Assim, aos poucos, a professora ia tentando organizar-lhes o pensamento. Porém, isso não estava a ser tarefa fácil, pois este processo exigia da parte da professora um grande controle de si e das questões que colocava para levar os alunos a encontrar uma resposta ou pelo menos a pensar que eram eles a encontrar essa resposta:

Prof.ª- Então agora vamos por partes: quanto é que a Rita vai dar à Sofia?
Sara- 50.
Prof.ª- E quanto é que a Catarina vai dar à Sofia?
Bela e Sara- 50
Prof.ª- E quanto é que ela tem que gastar?
Bela- Ela tem que gastar 5 euros e já gastou 4.
Sara- Ah! Então tem de dar um euro!

Para além da sua dificuldade em comunicar oralmente com os colegas e com a professora, Tomás revelava também uma certa aversão à escrita. Depois de ter sido o impulsionador da resolução e de ter ouvido Bela e Sara falarem de como as três amigas acertariam as contas, afirmava não saber, apenas para não ter que se pronunciar oralmente e escrever depois:

Prof.ª- Tomás, o que diz a tua resposta?
Tomás- Cada uma das amigas vai gastar 5 euros.
Prof.ª- Tudo bem, mas não é isso que os dados me dizem que elas gastaram. O que é que eu quero saber?
Tomás- Como é que elas vão acertar as contas.
Prof.ª- E todos me disseram que elas não gastaram todas o mesmo dinheiro. Como é que elas vão acertar as contas?
Tomás- Não sei.

Ana segredou-me, no momento, que "ele não sabe é passar para a Língua Portuguesa" o seu raciocínio matemático, necessitando que a professora ou outro lhe dite o que deve escrever, bloqueando muitas vezes na simples escrita de letras:

Prof.ª- Então vá! Ponto e vírgula (dita) a Ca...põe um C...a Catarina... um C de Catarina, não é? [Tomás apagou] Como é que se escreve Catarina, Tomás?
Ana acabou de ditar a resposta a Tomás e passou para o plenário de turma.

3.ª parte da actividade:comunicação à turma dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo

Mais uma vez a professora mostrou estar a par da resolução de cada um dos grupos da sala. Dividiu o quadro em quatro partes e, à medida que o porta-voz vinha à frente explicar como o grupo tinha feito, Ana escrevia a resolução correspondente. Preferiu ser ela a registar no quadro, para ficar mais perceptível.

O primeiro grupo a expor foi o grupo em foco. A sua porta-voz foi a Sara. Sara mostrava-se receosa. É boa comunicadora, mas expor-se assim aos colegas não a deixava à vontade. No entanto, pudemos perceber que tinha compreendido o problema pela forma como explicitou o seu raciocínio (ver Figura 5).

A presença da professora a seu lado, atenta à sua verbalização, fazia Sara sentir-se mais apoiada, podendo corrigir algo, se necessário, sem medo de punições:

Sara- Nós 1.º fizemos a conta do que elas tinham gasto para comprar os alimentos. Deu-nos 15 euros que era ao todo o dinheiro que elas tinham. Depois fizemos 15 a dividir por 3 que era a dividir pelas 3 amigas. Depois vimos que a Sofia era a que tinha dado mais, tinha dado mais dinheiro. E ali deu-nos 5, então tínhamos de …
Prof.ª- A Sofia tinha dado mais dinheiro...
Sara- A Sofia tinha de dar 50 cêntimos …
Prof.ª- Ha…ha…ha…
Sara- … de receber 50 cêntimos da Rita; e a Catarina tinha de dar 1 euro à Sofia que era para dar os 5.

Do mesmo modo nunca faltou com o reforço positivo aos alunos:

Prof.ª- Muito bem. Ela merece uma salva de palmas porque estava muito nervosa. Vês Sara, não foi tão difícil assim. Agora já percebeste bem.

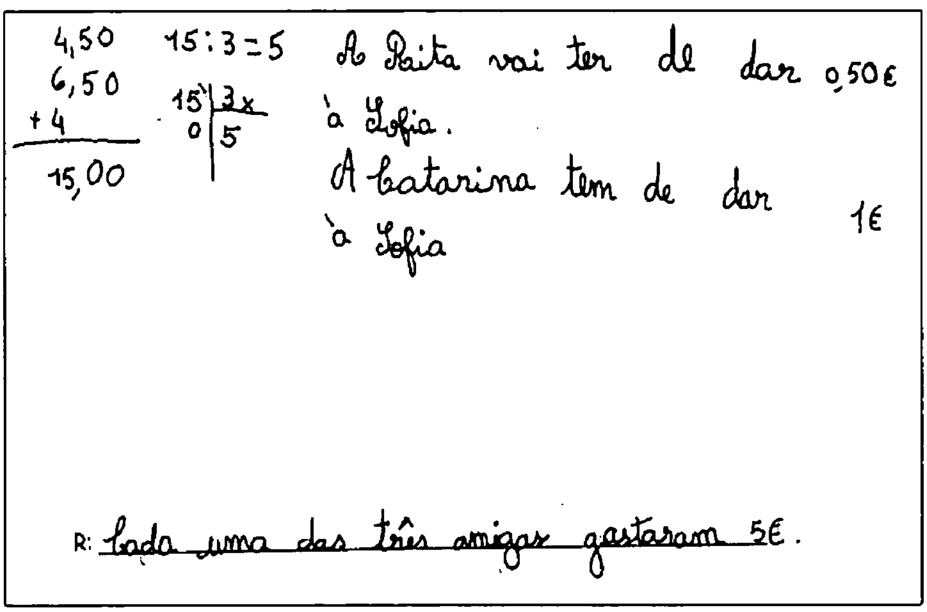


Figura 5 – Os cálculos efectuados pelo grupo em foco para o acerto de contas.

A porta-voz que se seguiu foi Sandra. Esta aluna revelou algumas dificuldades na verbalização do raciocínio utilizado na resolução do problema (ver Figura 6) e, por isso, Ana questionou-a com mais frequência. Sandra é também o exemplo de que as questões da Língua Portuguesa se têm revelado fundamentais no processo de resolução de problemas. Sandra revelou possuir vocabulário restrito e pouca compreensão das operações, necessitando de alguém para lhe organizar as ideias:

Sandra (apontando para a soma)- Aqui nós fizemos a conta para a seguir nós fazermos a conta de dividir: 15 a dividir por 3.
Prof.ª- E o que é o 5?
Sandra- É o dinheiro para elas todas terem 5 euros igual.

Ana tentou junto dela e com ela negociar o significado de cada forma verbal utilizada:

Prof.ª- Para terem ou para terem de pagar igualmente 5 euros?
Sandra- Sim. Depois escrevemos: Rita tem 4,50 euros.
Prof.ª- Tem ou pagou?
Sandra- Pagou; A Sofia tem 6,50 euros.
Prof.ª- Tem ou pagou?
Sandra- Pagou; e Catarina pagou 4 euros.

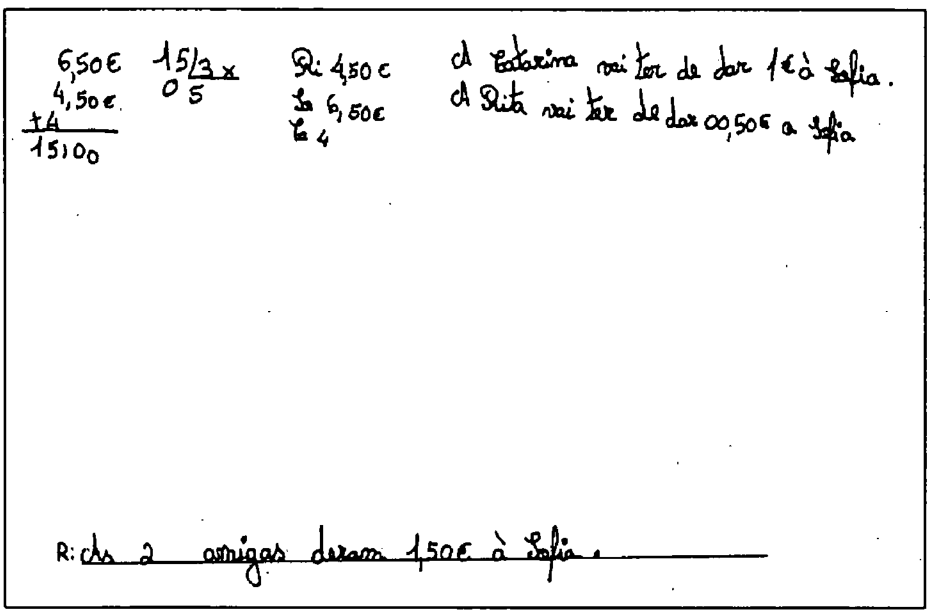


Figura 6 – Os registos do grupo de Sandra para o acerto de contas.

Sandra precisou de contextualizar a situação para fazer o acerto de contas, mas a sua última afirmação mostra que continua a ter dificuldade em partilhar os significados, contudo, parece ter compreendido o problema:

Sandra- A Catarina como gastou menos, teve de ir a casa buscar 1 euro para dar à Sofia que pagou mais e a Rita também teve de ir a casa buscar 50 para dar à Sofia. Depois todas ficaram com 5 euros igual.

Quando Pedro, outro elemento do mesmo grupo, leu a resposta a pedido da professora: "As 2 meninas deram 1 euro e meio à Sofia", pensei, no momento, que essa resposta merecia um comentário da turma. No entanto, as outras crianças não questionavam o grupo, talvez por saberem que a resposta tinha sido validada pela professora. E, quando tentei fazê-lo, Ana interveio e respondeu ela mesma:

> Eu- Ninguém tem nada a dizer? O Rui diz que as 2 amigas deram 1euro e meio à Sofia!
> Sandra- Ó professora a Rita deu 50 cêntimos, a Catarina deu 1 euro.
> Eu- Então é melhor explicares, está bem Pedro? Foi 1 euro e meio como?
> Prof.ª- Foi em conjunto. Eu sei que foi! Mas é assim: eles têm a resposta em cima nas frases e depois aí escreveram em conjunto.

Este último diálogo evidencia a necessidade de Ana diferenciar as resoluções, mesmo que seja através da resposta escrita, já que este problema só tinha uma solução.

Quando chegou a vez de outro grupo, foi a professora que iniciou a explicação da estratégia utilizada para a resolução do problema (ver Figura 7) e Júlio, porta-voz do grupo, ia confirmando:

> Prof.ª- Este grupo começou assim [ao mesmo tempo escreve no quadro]:
> R $\longrightarrow$ 50 $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ 4,50€
> C $\longrightarrow$ 1,50 $\longrightarrow$ S $\longrightarrow$?
> Prof.ª- Vocês primeiro conversaram em grupo.
> Júlio- Sim.
> Prof.ª- E a Marisa disse que havia uma que tinha pago mais, não foi?
> Júlio-Sim.

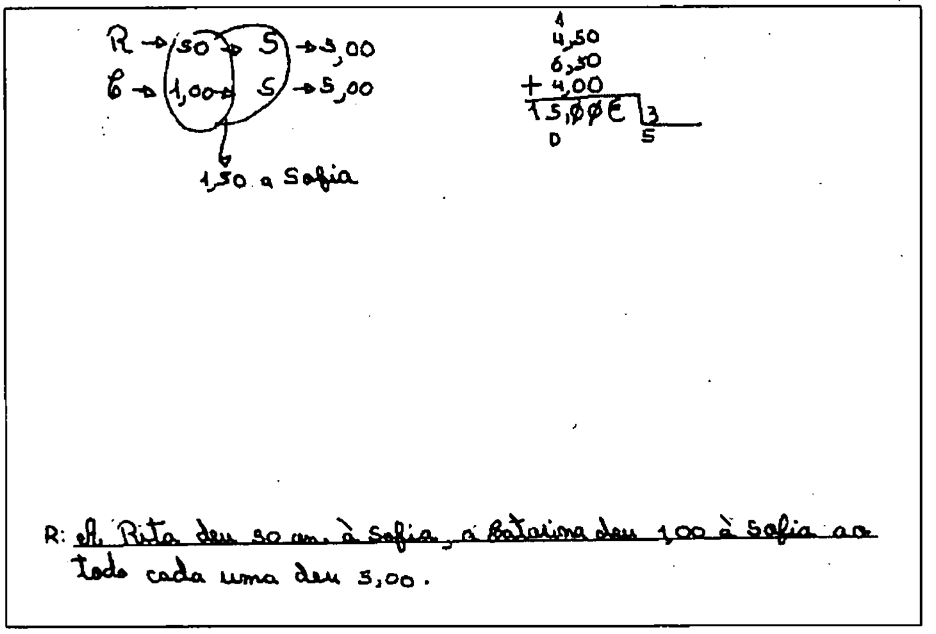


Figura 7 – Estratégia utilizada pelo grupo de Júlio no acerto de contas.

Ana sentia-se demasiado envolvida neste processo. Tinha gostado do raciocínio, de certo modo diferente, dos alunos:

Prof.ª- E pensaram que as que tinham pago menos tinham que dar...
Júlio- ...mais
Prof.ª- Mas não podiam dar aquele dinheiro que tinha sido gasto na loja, tinham que ir buscar o dinheiro...
Vários alunos- ...a casa.
Prof.ª- A casa, ao mealheiro, à mãe ou a qualquer sítio. Certo? E, então foram por tentativas.

É interessante verificar que, nesta parte da actividade, Ana interagiu com a turma através da exposição conjunta do trabalho realizado, alternando a sua participação com o porta-voz de cada grupo. Assim, explicando os passos seguidos durante o estabelecimento e a execução do plano por Júlio, Ana verbalizou o processo de resolução do grupo, como se a ele pertencesse:

Júlio- A Catarina ficou com 4 euros e meio.
Prof.ª- A Catarina ficou, não. A Catarina gastou 4 euros e meio porque a Rita lhe deu 50 cêntimos.
Júlio- E a Catarina ia dar 1 euro e meio à Sofia.
Prof.ª- Só que depois aqui [apontando para o ponto de interrogação] pararam. Depois começaram a pensar: então agora damos 1 euro e meio à Sofia? E agora como é que acertamos?

Podemos dizer que as crianças tinham compreendido o problema até aqui, uma vez que se mostravam à vontade acompanhando o raciocínio da professora. Esta, por sua vez, estava tão entusiasmada que continuava a explicar como tudo tinha acontecido:

Márcia- Não sabíamos se era 5 ou não!
Prof.ª- Estavam por tentativas! E de certa forma eu pedi ao grupo para ver qual era a despesa. Ou seja quanto é que elas tinham gasto. Foi assim que partiram para aqui [apontando para os algoritmos da adição e da divisão já escritos no quadro].

Enquanto Júlio continuava a explicar como tinham feito, os colegas atentos corrigiam a sua explicação, se necessário:

Júlio- Fizemos a conta para ver quanto gastaram e depois dividimos por cinco...
Márcia- Por 3 que eram a Rita, a Sofia e a Catarina.

Ana mostrava-se atenta e sempre que um aluno explicitava o raciocínio do grupo, procurava saber se esse elemento, ou outro do mesmo grupo, compreendia o processo em que tinha estado envolvido. Mais uma vez, surgiu o obstáculo da compreensão das operações:

Prof.ª- E o que são estes 5 euros?
Márcia- Estes 5 euros... [não continuou]
Prof.ª- João.
Júlio- Era o resultado.
Prof.ª- E o que representa 5 euros?

Ana insistia em partilhar significados como *cada uma gastou* e *cada uma tem de gastar*:

Prof.ª- O que são estes 5 euros, que aparecem em todas as resoluções?
Júlio- É o que cada uma gastou.
Prof.ª- Gastou?! O que me diz o problema é que uma gastou 6 e meio a outra 4 e meio e a outra 4. O que são estes 5 euros?
Jacira [do grupo]- Elas gastaram isso tudo, 15. Só que cada uma deu 5.
Prof.ª- Então cada uma gastou ou tinha de gastar?
Jacira e grupo- Tinha de gastar.

Ana pretendia ainda saber se os alunos compreenderam o significado de *acerto de contas*:

Prof.ª- Então, em que sítio do problema é que começa o acerto de contas?
Jacira- É a partir daí [referia-se a partir dos cálculos já efectuados].

Ana continuava de tal forma entusiasmada pela forma como este problema começou a ser pensado naquele grupo que, mais uma vez, passou ela a explicar como tinha sido feito. Os alunos limitavam-se a dar respostas curtas:

Prof.ª- E foi isso que o grupo fez. Quando chegou aqui [apontando para a divisão] foi acertar as contas ali [apontando para o esquema inicial do grupo], à primeira tentativa que tinham feito. Fizeram isto, eu vou escrever a amarelo [por cima do que estava feito no esquema inicial]: aqui mantiveram R deu 50, mas agora não deu os 50 à Catarina, ela foi dar os 50 à Sofia e pagou 5 euros. A conta dela está acertada.
Depois, foram a esta [2.ª linha do esquema inicial] e pensaram: a Catarina, tem de dar, não 1 euro e meio, mas 1...
Alunos do grupo- Euro
Prof.ª- A quem?
Alunos do grupo- À Sofia.

Ana explicava a estratégia do grupo e o que tinha acontecido à resposta do Pedro, do grupo anterior:

Prof.ª- Depois fizeram isto [fez uma circunferência a tracejado à volta de 50, de S da 1.ª linha do esquema e de 1 euro e de S da 2.ª linha do esquema] e disseram assim: 1 euro e

meio foi dado à Sofia; que é a resposta daquele grupo. Quando aquele grupo diz, as duas deram 1 euro e meio à Sofia é isto que está aqui. Não deram cada uma, deram as duas juntas. Não deram igual, uma deu 1 a outra meio [apontando para o quadro]. E a resposta é...podes ler.
Márcia- A Rita deu 50 cêntimos à Sofia; a Catarina deu 1 euro à Sofia e ao todo cada uma deu 5 euros.

Por fim, Ana sintetizou a forma como este problema foi resolvido pelos grupos:

Prof.ª- Com excepção deste último grupo, todos os grupos começaram por aqui [apontando para os algoritmos no quadro]. Mas o acerto de contas, o devolver o dinheiro, começa a partir do momento em que se sabe que é 5 para cada uma.

Por fim, de comum acordo com o último grupo, foi apresentada a explicação para o problema semelhante criado por Ana e que nos parecia que havia crianças que não o tinham entendido. Foi a vez do Pedro ir "explicar o problema das cartolinas", como pediu Ana:

Pedro- A Mónica tinha de tirar para 50 do seu dinheiro 30 para dar 50.
Prof.ª- É? Ouçam bem o que ele disse. Eu disse [escreveu o esquema no quadro-ver Figura 8]: a Sandra deu 20, a Mara deu 50 e a Mónica deu 80. E ele disse que a Mónica vai... como é que disseste?
Pedro- Para ter 50 a Mónica tem de dar o resto à Sandra.
Prof.ª- E o que é o resto?
Pedro- É o que vai sobrar.
Prof.ª- O que é que ela dá à Sandra?
Pedro- Dá 30.

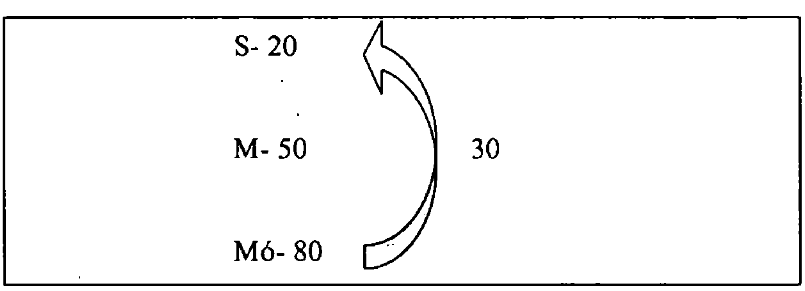


Figura 8 – . Representação da explicitação de Pedro concebida pela professora

Perante a persistência de Pedro, Ana aproveitou o seu raciocínio para o fazer compreender a situação de acerto de contas. O aluno só respondeu quando a professora contextualizou a situação:

Prof.ª- Então se ela emprestou à Sandra 30. Qual é a obrigação da Sandra agora?
Pedro- ...
Prof.ª- A Mónica pagou 80, a Mara 50 e a Sandra 20, quando saíram da loja com a cartolina, quem fez o quê?
Pedro- A Sandra teve de ir a casa buscar o dinheiro para dar à Mónica.
Prof.ª- Então afinal é a Mónica que dá à Sandra ou a Sandra que dá à Mónica?
Pedro- É a Sandra que dá à Mónica.

E para se certificar que o problema original também tinha sido compreendido por Pedro, Ana voltou a questioná-lo:

Prof.ª- E aqui Pedro [apontando para a resolução do grupo do Pedro], quem deu o quê?
Pedro- Foi a Rita e a Catarina que deram à Sofia.
Prof.ª- Porque a Sofia tinha pago...
Pedro- Mais.
Prof.ª- Quem pagou aqui [no problema semelhante] mais?
Pedro- Foi a Mónica.

Ana terminava a aula com um sorriso. Estava satisfeita pela forma como tinha corrido esta resolução de problemas.

Comentário global

Ana e os alunos mostravam-se animados pelo trabalho que estava a ser desenvolvido na sala de aula. Mais uma vez as interacções verticais decorreram de forma calma e compreensiva. À semelhança da sessão anterior, Ana procurou também desenvolver uma atmosfera de trabalho interactiva apoiando os alunos na verbalização das suas ideias e pensamentos, gerindo completamente a situação didáctica. No sentido de desenvolverem a capacidade de resolução de problemas, os alunos foram encorajados a dar explicações, e a clarificar os seus pensamentos. Além disso, a professora sintetizou ideias, validou afirmações e questionou os alunos também na tentativa de negociar os significados com eles.

Contudo, o número de intervenções da professora, quando se dirigiu à turma pode ter diminuido o número de participações dos alunos, por terem sido superiores às suas, limitando-se estes a responder com frases curtas.

Durante a segunda parte da actividade, Ana procurou circular por todos os grupos, encorajando-os a participar ou a escutar as explicações do outro, apoiando e reforçando positivamente os alunos.

Quanto às interacções aluno-aluno, ocorridas na segunda parte da actividade, observaram-se no grupo em foco, pequenos conflitos de relacionamento do duo das raparigas para com o duo dos rapazes, surgindo, assim, duas questões. A primeira tem a ver como o facto de as meninas não valorizarem as ideias de Tomás, menodesprezando-as: porque seria que Bela e Sara não levavam Tomás a sério? Na caracterização que Ana me fez destes quatro alunos, declarou que elas eram boas comunicadoras e uma matematicamente mais competente que a outra, mas ambas menos que Tomás. No entanto, elas revelaram-se mais competentes que ele tanto na oralidade como na escrita. Seria que o conflito advinha desse facto?

Contudo, as raparigas também fizeram algumas críticas a Daniel e, por isso, coloca-se a segunda questão: teria o factor sexo tido influência no tipo de interacções e conflitos que se estabeleceram entre os alunos desta idade e mais precisamente durante a resolução de problemas?

Nesta sessão, notou-se um forte empenhamento pela apresentação de estratégias diferentes pelos vários grupos de trabalho. Isto é, Ana tentou que algum pormenor fizesse a diferença nem que fosse na resposta escrita. Essa atitude, certamente, influenciou a resposta que cada grupo apresentou.

De um modo geral, os alunos explicitaram oralmente os passos seguidos para efectuar os cálculos e representaram as suas ideias matemáticas simbolicamente com recurso às operações aritméticas por escrito; ordenaram factos (primeiro: quanto gastaram ao todo, depois: quanto deveria pagar cada uma e, por fim: como deviam acertar as contas entre elas); interpretaram cada passo dado; calcularam somas de números decimais com números inteiros; efectuaram cálculos com valores monetários (calcularam o quociente de um número inteiro de dois algarismos por outro de um algarismo aplicado a uma situação e partilharam o significado da divisão como partilha); usaram estratégias diferentes para efectuar o cálculo (como foi o caso de Mara).

A análise dos dados mostra também que o obstáculo maior a esta resolução de problemas foi a expressão "partilhar igualmente as despesas" que apareceu no enunciado. As crianças acreditaram que quem pagou mais deveria restituir dinheiro a quem pagou menos, uma vez que as partilhas no seu dia-a-dia funcionam desse modo. Por exemplo, partilhar o lanche com um colega significa que quem tem mais dá ao colega que tem pouco ou não tem nada e não o contrário.

Mais uma vez a comunicação oral ocupou o primeiro lugar na eficácia das interacções. A comunicação escrita esteve presente, sem grande destaque, sobretudo na escrita da solução encontrada, ou seja na resposta ao problema colocado.

Outra constatação é a de que apenas se verificaram interacções horizontais na segunda parte da actividade pedagógica, ou seja, durante o trabalho de grupo e na ausência da professora, o que parece corresponder a uma imagem da professora como a autoridade máxima na sala de aula capaz de validar as suas ideias.

3. *Na pizaria*

1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma

Esta sessão iniciou-se de forma calma, tal como as anteriores.

Na primeira parte da actividade, Ana dialogou com os alunos sobre situações da vida do dia-a-dia, tais como anúncios e publicidade enganosa. Depois, apresentou a tarefa oralmente e por escrito.

Para dar início à resolução do problema, a professora incentivou os alunos a descobrirem "...se um anúncio é ou não é verdadeiro... criando em grupo estratégias para conseguir descobrir se aquela pessoa está ou não a enganar os clientes". De seguida, Ana leu o problema, em voz alta (ver Quadro 3.2).

À medida que as folhas com o enunciado iam sendo distribuídas, os alunos iam tecendo considerações acerca dele, dentro do grupo e em voz baixa, como: "achas que é possível ...20 pizas diferentes?" ou "ele tem de comprar muita massa!", relacionando-o imediatamente com a realidade.

Ana lia interrompendo a leitura com a intenção de tornar mais claras expressões que apareciam no texto, esclarecendo dúvidas que ela própria considerava, à partida, constituirem um obstáculo à resolução de problemas:

> Prof.ª- O anúncio é o que está ...entre ...aspas. [Continua a leitura até ao final]. Portanto, o anúncio é este "mais de 20 pizas diferentes". O que é que isto quer dizer aos clientes? Quem passa e lê, o que é que interpreta com esta frase? Que...naquela pizaria...
> Vários alunos- Há mais pizas diferentes.

Para ajudar os alunos a compreender o problema e a pensar no significado da expressão "mais de 20 pizas diferentes", a professora formulava questões que colocava sucessivamente aos alunos, iniciando ela mesma a resposta. Esta forma de interacção entre professora e alunos tem sido uma prática comum nas nossas escolas, na tentativa de promover a aprendizagem dos mesmos.

A professora prosseguiu sintetizando a resposta e colocando uma nova questão que poderia ajudar os alunos a completarem o trabalho:

> Prof.ª- Quer dizer, há uma escolha, na lista, de mais de 20 [pizas] diferentes. E o que são pizas diferentes? Mara.

Mara respondeu a essa questão utilizando nomes de ingredientes diferentes e a professora logo aproveitou para negociar com os alunos o significado da palavra ingrediente:

> Mara- Há umas que têm chouriço, outras têm fiambre, outras têm ananás...
> Prof.ª- Vamos chamar a isso ingre...dientes.

Para negociar com os alunos que a massa não era ingrediente, Ana desenhou uma circunferência no quadro e escreveu no seu centro um *m* de massa, solicitando que os alunos confirmassem a partilha desse significado:

> Prof.ª- Então a massa é a base, não é?
> Vários alunos-Sim.
> Prof.ª- É a base... Isto... é a massa, não é ingrediente. Tudo o que se põe ali por cima daquilo [apontando a sua representação] é ingrediente. É ou não é?

Ana sugeria, assim às crianças uma estratégia de resolução para encontrar a solução do problema: a utilização do desenho.

A turma mantinha-se passiva, mas parecia atenta. Era notória a interiorização de regras de participação nas aulas, como por exemplo dedos no ar para poderem intervir.

Depois do problema estar compreendido, foi preciso estabelecer um plano. Então, foram inventariados possíveis ingredientes a colocar nas pizas. No entanto, este passo fez crer a alguns que poderiam escolher mais de cinco ingredientes, para colocarem apenas cinco diferentes ou menos em cada piza.

O ambiente da sala de aula tornou-se, de repente, mais agitado e mais participativo que o habitual, pois a professora deixava que os alunos esquecessem o problema por momentos, e se lembrassem dos ingredientes de uma piza. Porém, ao sinal da professora, os alunos voltaram à sua normal participação.

Durante este tempo os alunos expressaram livremente a sua ideia, quase esquecendo que tinham um problema a resolver

Com vista à compreensão do problema e ao perceber que um dos obstáculos a esta resolução poderia ser a palavra "diferente", Ana resolveu negociar com os alunos o seu significado. Assim, baseando-se na realidade próxima das crianças a professora expôs primeiro o seu ponto de vista acerca desse conceito e depois questionou-as para ter a certeza que os significados tinham sido partilhados.

Ana preocupou-se em alertar os alunos para determinadas palavras que podiam fazer o sucesso da resolução do problema, tentando assim prever onde residiam as suas dificuldades e colocar-lhes questões que os levariam a clarificar os seus próprios pensamentos:

> Prof.ª- São dois pratos, mas diferentes. Ora bem, com as vossas pizas acontece o mesmo. Vocês tomem atenção a uma palavra que vem aí, é muito pequenina mas essa palavra muda tudo. É aí que está o segredo. ...ATÉ 5 ingredientes. O que é isto de ATÉ? Uma palavra tão pequenina e que pode mudar tudo, no problema.
> Manuel- Não se pode pôr mais do que 5 ingredientes.
> Prof.ª- Concordam com o Manuel "não se pode pôr mais de 5"?
> Vários alunos- Sim.

Quando Ana tentou saber o que pensavam os alunos acerca do número de ingredientes que se poderiam colocar nas pizas, ou seja, que combinações se poderiam fazer tendo ao dispôr 5 ingredientes, ficou a saber que havia outros obstáculos à compreensão do problema, tal como pensar que as pizas só eram diferentes se levassem todos os ingredientes diferentes:

> Prof.ª- Então continuam a concordar com o Manuel que são pizas que não podem levar mais de 5 [ingredientes]. Mas podem levar 5?
> Jacira, Bela e Mónica- Podem.
> Prof.ª- Todos concordam que podem? E só podem levar 5?!
> Mónica- Sim.
> Manuel- Ou então, 4,3,2,1...tanto faz...

Percebia-se que ao solicitar esclarecimentos acerca da ideia anterior, o significado da expressão *pizas diferentes com cinco ingredientes* necessitava também de uma melhor clarificação, como evidenciam os diálogos:

> Pedro- Ó professora, podem levar um ingrediente ou mais, até 5.

Prof.ª- O que é isso "ou mais" explica-te melhor.
Pedro- Às vezes só podem pôr 1,2,3,4 ou 5...
Prof.ª- Na mesma, ou em diferentes pizas?
Pedro- Na mesma.

Ana procurou não legitimar a ideia de Pedro, remetendo esse assunto para o grupo resolver na segunda parte da aula.

Na primeira parte da actividade não chegaram a verificar-se interacções horizontais. Os alunos tendiam a solicitar a validação das suas ideias junto de Ana e se isso não era feito, mostravam-se inseguros:

Júlio- Porque é que não pode ser: dois numa, dois noutra e dois noutra?
Prof.ª- Alguém diz que não se pode pôr dois ingredientes numa piza, dois ingredientes noutra e dois ingredientes noutra?
Júlio- Não...
Prof.ª- É bom pensares nisso. Tu achas que se pode ou não se pode? Pode ou não?
Júlio- [Encolheu os ombros]
Prof.ª- Não sei como é que tu estás a pensar distribuí-los!

Ana solicitou aos grupos que começassem a trabalhar a partir desse momento.

2.ª parte da actividade: resolução do problema pelo grupo em foco

Tomás foi muito rápido na decisão de começar a resolver o problema. Ele tinha-o compreendido e começara a estabelecer um plano quando iniciou a sua pergunta ao grupo: "que ingredientes é que...". Bela, porém, não o deixou terminar, dirigindo-se a ele com ironia. Enquanto isso, Daniel procurava focalizar os colegas para o problema. A forma como se começavam a estabelecer as interacções verbais entre eles, fazia crer que o problema não iria ser resolvido pelo grupo dos quatro elementos. Vejamos:

Daniel- Vou desenhar 20!
Bela- Puxa! Estás passado ou quê?
Tomás- Estava a pensar fazer uma piza e depois os ingredientes.
Bela- Eu faço uma piza e depois faço uma seta a dizer 20.
Daniel- Sabes porque é que eu vou ter que desenhar as pizas? Porque vou ter que desenhar em cima o que eu vou por nelas!

Daniel continuava a verbalizar o nome dos ingredientes que escolhia e a executar o seu plano, individualmente, mas Bela e Sara pareciam não ter entendido o que se pretendia no problema e solicitavam a ajuda dos colegas que sabiam serem mais competentes que elas na resolução de problemas:

Bela- Temos de fazer 20 ingredientes, Daniel?
Daniel- Não. Espera aí, deixa-me fazer isto. 1,2,3,4....
Sara- Se ao menos ele dissesse o que é que está a fazer!
Daniel- Espera aí, só estou aqui a tentar fazer uma coisa!
Bela- Ó Tomázinho, podes-me dizer o que estás a fazer?

Esta atitude mais individualista dos alunos, que se traduz na concepção e execução de um plano de resolução individual para o problema para só ser comunicada aos restantes elementos do grupo se der certo, faz salientar dois aspectos: primeiro, a necessidade de cada um dos alunos reflectir individualmente sobre o seu próprio pensamento, tentando torná-lo mais claro para si antes de o apresentar ao grupo; segundo, os alunos ainda não aprenderam a definir estratégias, em grupo.

Nesta parte da actividade e depois de momentos de dependência de Sara e Bela de Daniel, verificou-se que apesar destas alunas não terem ainda sugerido uma estratégia de resolução, o seu raciocínio era correcto, mas não conseguiam argumentar perante um colega cuja competência matemática era reconhecida por todos:

Daniel- Ehhhh! Nós não temos de ter só 5 ingredientes!Só temos de fazer pizas com 5 ingredientes, não?
Sara- E com menos... di-fe-ren-tes. 5, di-fe-ren-tes.
Daniel- [leu de novo] ah! então posso fazer mais, não é preciso só fazer estes!
Bela- Não... até! Daniel, até cinco!
Sara- Pois, pode ser com três, pode ser com dois, pode ser com um pode ser com 4.
Daniel- Sim, mas eu posso ter muito mais. Eu posso ter mil! Só não posso ter mais de 5 ingredientes nas pizas!
Sara- Ahhh!

Depois de ter executado parte do plano sozinho, Daniel colocou à disposição de todos o trabalho que fez, mas que considera do grupo:

Daniel- Pronto, eu já fiz tudo! Quem quiser copia.
Tomás- Eu já fiz quase tudo! 1...2...3...4.............20.

Sara, muito indecisa na tomada de decisões, revelou pouco à vontade na resolução deste tipo de tarefas e para complicar, Daniel não tinha explicitado o seu raciocínio.

Tomás tinha já adoptado a estratégia de Daniel: escolher os ingredientes, relacioná-los com símbolos, desenhar 20 "pizas" e colocar a seu lado a combinação dos símbolos. Entre ele e os restantes elementos do grupo existem poucas interacções verbais, além de revelar alguma dificuldade de relacionamento com o sector feminino do grupo. No entanto, de quando em vez, verbalizava um ou outro pensamento. Uma das vezes, fez com que Daniel reflectisse sobre a estratégia que tinha adoptado:

> Tomás- Ainda não fiz com quatro...ingredientes!
> Sara- Ham?
> Tomás- Ainda não fiz com quatro ingredientes.
> Daniel- Vais ter de fazer a piza com todos!
> [Pausa]
> Daniel- Ah yá... eu não preciso de... obrigada...eu não preciso de fazer seis ingredientes. Só preciso de fazer cinco!

Contudo, Sara continuava sem entender a estratégia usada pelos rapazes e por isso criava o seu próprio plano.

Tanto a atitude de Sara como a de Bela revelam pouco espírito crítico e pouca capacidade de argumentação em relação ao plano de resolução que conceberam:

> Sara- Agora desenhamos uma piza enorme, não é? Em vez de fazermos estas pequeninas, porque é que não fazemos...
> Bela- Então era mais fácil fazer 20!
> Sara- E que tal nós pormos agora na nossa piza 5 ingredientes? Só uma piza familiar.

Tomás que tinha já contado 21 combinações no seu registo, mostrava-se incrédulo acerca do trabalho das colegas, dizendo "não percebi ainda como é que vão meter os ingredientes todos [apenas numa piza]", uma vez que tinha "51 símbolos no total".

Na resolução desta tarefa a comunicação entre os elementos foi um processo muito difícil, uma vez que as interacções eram realizadas de modo egocêntrico, caracterizadas por pouca verbalização das ideias e por um isolamento das actividades do grupo que aparentemente não se justificava.

Bela, Sara e Tomás revelavam uma preocupação comum: a apresentação, a toda a turma, da estratégia encontrada para resolver o problema. Isto pode ser devido à dificuldade em argumentar as suas ideias e em explicitar o seu pensamento:

> Sara- Olha Bela, agora vais ser tu a explicar!
> Bela- Não vou não!
> Sara- Não, que ideia. Eu já fui explicar, Bela!
> Bela- O Tomás também não foi!
> Tomás- Se vocês dizem assim tudo errado para mim! Quem é que vai de nós os dois?
> Bela- Eu não vou.

Sara- Não! Se a professora mandar, vais!

Tomás, certamente, estava a referir-se à circunstância de Sara e Bela não valorizarem as suas ideias e falarem quase sempre num tom irónico, como se ele em nada contribuísse para a resolução dos problemas.

É curioso verificar que, enquanto Bela e Sara vêem as pizas como entes reais ou do mundo real, Daniel e Tomás têm a capacidade de "transformar" os ingredientes em entes matemáticos, combinando-os, com o objectivo de darem resposta ao problema.

Ao aperceber-se que Sara e Bela estavam a desenhar pizas iguais, Daniel achou estranho esse procedimento e tentou saber "como é que [elas] sabem que ingredientes foram usados nas pizas?" dizendo-lhes como tinha feito. As respostas dadas pelas colegas indicam que até este momento elas não tinham compreendido o problema:

Sara- Porque nós escrevemos 20 pizas!
Daniel- Iguais.
Sara- Pois.
Bela- Olha lá, isso só prova que o anuncio é falso, Daniel!
Daniel- Olha lá, fiz 20 pizas. Fiz molho de tomate com chouriço. Molho de tomate com queijo. Molho de tomate com fiambre. Molho de tomate com cogumelos. Fiz bués!
Bela- E porque é que fizeste?
Daniel- Então, e dá certo!

Bela não entendia os procedimentos explicitados por Daniel e isso poderia ficar a dever-se à não verificação de cada passo da execução do plano de resolução, ou ao que parece mais provável, à não compreensão do problema na 1.ª parte da actividade. Mas, aliada à má compreensão do problema estava a falta de espírito crítico em relação ao resultado obtido. Elas encaravam os resultados como verdades. Perante as descrições de Daniel, de manipulação dos ingredientes, Bela solicitava-lhe explicações, mas Daniel não conseguiu explicitar o seu raciocínio mais claramente, tornando assim ineficaz a comunicação entre os dois. É de referir que não é a primeira vez que Bela e Sara tentam fazer matemática compreendendo.

Ana, ao aproximar-se, mostrou-se admirada com o comportamento dos alunos, uma vez que ela tinha formado um grupo de três bons comunicadores e agora não percebia "porque é que o grupo faz coisas diferentes". Daniel rapidamente se justificou dizendo "eu e o Tomás fizemos igual e elas as duas fizeram as duas igual". Era notório que não sentia poder para convencer as colegas a trabalharem em grupo e mesmo que não estivesse de acordo com a sua resolução também não conseguia argumentar que não estavam certas:

Prof.ª- Então, que se passa?
Sara- Eles meteram 20 pizas e nós metemos uma piza e 20 [ingredientes].
Daniel- Assim com uma piza elas não vão lá professora!
Sara- Então, mas nós já metemos aqui 20 pizaaas!
Bela- Fizémos a massa e pusemos aqui uma seta a dizer 20 pizas e pusémos aqui 5 ingredientes que é para não estarmos a desenhar os ingredientes.

Assim, através de questões de focalização fechadas e de resposta curta, Ana procurava que as duas alunas ultrapassassem as suas dúvidas, se envolvessem na tarefa e reformulassem o trabalho:

Prof.ª- O anúncio diz "mais de 20 pizas diferentes". Já conseguiste provar se com esses 5 ingredientes fazes mais de 20 diferentes ou menos? Neste momento, o que eu vejo aí é que tu com os cinco ingredientes fizeste uma. Não provaste nada, ainda.
Bela- Pois não!
Prof.ª- Tu tens que usar sempre os cinco [ingredientes]?
Bela- Não! Agora posso fazer com 3.
Prof.ª- Então vá, com três!

Também foi dada aos outros dois alunos a oportunidade de explicarem os seus raciocínios. Tomás parecia comunicar mais com a professora, expondo de livre e espontânea vontade as suas ideias, bem como os passos que deu para executar o plano. Pois, apesar de ter "imitado" Daniel na implementação da estratégia, ao ter utilizado o mesmo tipo de símbolos (formas geométricas), revelou-se independente do colega nas combinações que fez. Isto pode indiciar, por um lado, a falta de colaboração dos diferentes elementos no trabalho de grupo, e, por outro, uma certa confiança, compreensão e entusiasmo pelo problema, resolvendo-o da forma que melhor entendeu, personalizando essa mesma resolução:

Tomás- Primeiro desenhámos as vinte pizas e fomos metendo os ingredientes. Eu fiz...
Prof.ª- Fizeram por símbolos?! Triângulos...Expliquem.
Daniel- Quadrados... o molho de tomate: triângulo; o chouriço: quadrado; o queijo: rectângulo; o fiambre a bola e os cogumelos...
Tomás- Mas nós não fizemos com os mesmos ingredientes, nem a mesma ordem.

Quando Ana descobriu que Tomás tinha feito uma combinação com seis símbolos ficou muito admirada e de certo modo entusiasmada com o raciocínio do aluno. Possivelmente Tomás queria arranjar uma contraprova, mostrando assim que só se conseguiriam fazer mais de 20 combinações diferentes se houvesse disponíveis 6 símbolos:

> Prof.ª- Vocês não têm que fazer o possível para que isto dê 20! Vocês têm que ver se realmente é verdade ou não! Não podem alterar ingredientes. Quantos ingredientes é que são permitidos naquele restaurante?
> Daniel e Tomás- 5
> Prof.ª- Até 5; então, como é que ele põe 6?
> Tomás- Mas em cada piza o máximo que posso pôr é cinco, só fiz seis ingredientes...

Porém, Daniel acabava de ter uma nova ideia, esta conversa tinha tornado mais claro o problema e a professora solicitava ao aluno que explicitasse melhor o seu pensamento:

> Daniel- Professora, eu ainda podia fazer mais, porque eu não fiz com 4 ingredientes.
> Prof.ª- Tomás, tu também! Será que ainda se podem fazer mais? Pensa.
> Daniel- Eu já fiz mais uma e ainda consigo fazer mais.
> Prof.ª- Então explica aos colegas como é que estás a fazer.
> Daniel- Porque como eu ainda só tinha feito com um ingrediente, com dois, com três e com cinco, eu agora...

Sara não parece estar tranquila a resolver esta tarefa. Nota-se na aluna uma certa insegurança e medo na tomada de decisões. A aluna revela que até este momento ainda não compreendeu quais os objectivos do problema, solicitando por isso ajuda directa à professora:

> Sara- Ó professora, não é preciso fazer 20. Eles fazem mais de 20...posso fazer mais de 20!
> Prof.ª- Mais de 20, sim. Tu tens de provar que isso é verdade.
> Sara- Mas temos que a partir de agora desenhar 20 pizas?!

Perante o pedido de ajuda de Sara, a professora não pôde deixar de analisar o registo de resolução da aluna. Colocou-lhe, então, algumas questões que a levariam a completar o seu trabalho. Mas, percebendo que ela utilizava uma representação icónica pouco perceptível para os ingredientes, para além de não ter legendado o trabalho, Ana, de um modo afirmativo, procurou que a aluna o fizesse comparando o seu trabalho com o dos colegas de grupo, mas a interpretação do enunciado e da questão a resolver, continuava a ser um problema para a aluna:

> Prof.ª- E o que é que vais cá meter dentro?
> Sara- Então, aqui nesta metemos...
> Prof.ª- Mas eu não sei o que é isto! ... É o quê? Chouriço...

> Sara- Queijo e... o molho de tomate.
> Prof.ª- Ah! Tu não pões a legenda e eu não consigo ler a gravura! Todas as gravuras precisam de uma legenda! Estás a perceber? A legenda deles foi com figuras geométricas e a vossa é com desenhos!

Ana afastou-se do grupo para que os alunos pudessem refazer os seus trabalhos. No entanto, continuava a ser difícil para Sara abstrair-se da realidade de todas as pizas levarem molho de tomate, parecendo desconfiar antes da estratégia sugerida. Ela percebia algo de estranho na sua resolução, mas não reflectia sobre os objectivos do problema, nem verificava se os passos que tinha efectuado estavam correctos.

Ao longo dos trabalhos, Sara tinha-se mostrado muito dependente das orientações de Daniel, que se resumiam afinal à simples imitação dos seus procedimentos. Mas, como nesta actividade ele tinha resolvido tomar uma atitude mais individualizada, Sara apoiou-se em Bela, desenvolvendo as duas uma estratégia de resolução pautada pela ausência de reflexão e de espírito crítico. Embora parecesse que as duas alunas estavam atentas à interacção estabelecida entre a professora e Bela e que se tinha traduzido num ganho positivo para esta última, estava visto que Sara não tinha conseguido beneficiar dela.

Desta vez, Daniel intervinha mais no sentido crítico, ao comparar a apresentação de cada um dos registos, do que no sentido de apoiar directamente Sara. Ele entendia que o seu registo e o de Tomás estavam mais perceptíveis que os de Bela e Sara, aumentando assim a sua autoconfiança. Porém, se ele tivesse sido mais convincente e menos convencido, Sara, provavelmente, teria reconhecido que não estava certa:

> Sara- [desenha em várias "bases de piza"] Molho de tomate, molho de tomate, molho de tomate... está tudo igual e só me faltam três!
> Daniel- Eu não sei o que tens aí nesse ingrediente! O que é que tem ali nem ali. No nosso é que está fixe!
> Sara- Não se percebe nada também!

Apesar disso, o grupo continuou bem humorado, mesmo na presença da professora.

Quando Ana voltou a interagir com os alunos, questionou-os com a intenção de confirmar se tinham alcançado uma solução para o problema, incentivando-os a escrever a resposta.

3.ª parte da actividade: comunicação à turma dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo

A comunicação dos resultados foi feita a partir da projecção dos registos de cada grupo.

Ana mostrou controlar eficazmente toda a situação: colocou a folha de um registo (ver Figura 9) no projector e solicitou a Mara, à porta voz, que explicitasse o modo como o grupo tinha resolvido o problema, enquanto ela, junto ao projector acompanhava o que a aluna ia dizendo. Notava-se que se esforçava por responder a todo o tipo de situações. Começou por tentar sintetizar o raciocínio verbalizado por Mara para que todos os alunos o entendessem:

> Prof.ª- O que é que nós vemos aqui? Eu vou apontando à medida que ela vai falando. Vá...fala.
> Mara- Nós começámos por fazer a lista dos ingredientes. Escolhemos azeitonas, chouriço, fiambre, queijo e tomate. Depois, fizemos as bases das pizas. Depois, começamos a fazer pizas de um [ingrediente] cada uma...
> Prof.ª- Devagar...devagar...que eu não sei se toda a gente percebeu. Isto aqui é só um ingrediente. Estão a ver os símbolos? São todos iguais. Só que têm vários queijos, vários chouriços, vários fiambres...estão a perceber?

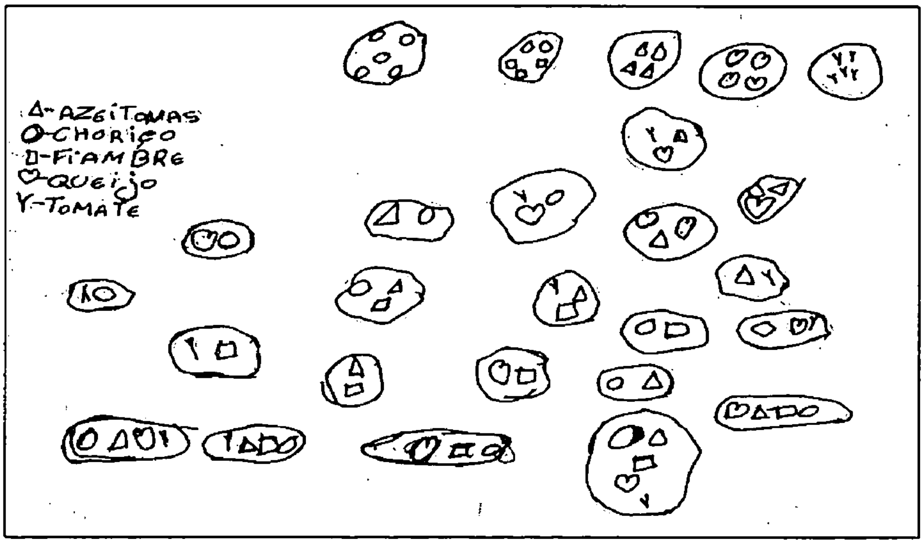


Figura 9 – Estratégia utilizada pelo grupo de Mara para saber se o anúncio era verdadeiro.

Para além de revelarem dificuldades no campo lexical e semântico, os alunos demonstraram também dificuldade em escrever com correcção ortográfica, pelo que

Ana aproveitava todas as ocasiões para esclarecer ou corrigir qualquer falha. No entanto, isto fez-nos reflectir e colocar uma questão: até que ponto essas interrupções não distraíram, ou inibiram o aluno ou os alunos da explicitação pretendida?

À medida que a aluna explicava como o grupo tinha resolvido o problema, a professora percorria o acetato mostrando à turma o que ela estava a dizer. Ana aproveitava, assim, todas as oportunidades para ir esclarecendo os alunos ou até sintetizando ideias:

> Prof.ª- Sim, aqui estão: de 2, de 2... [apontando para a representação das pizas com dois ingredientes]
> Mara- Depois começámos a fazer as de 4 ingredientes. Iamos à legenda ver se já tinhamos posto. E acabámos por pôr a de 5.
> Prof.ª- Então, quantas fizeram?
> Mara- 26.

Essa interacção aconteceu de um modo afirmativo, explicando procedimentos, tornando as afirmações mais claras, ao mesmo tempo que as validava, mas também colocando perguntas de confirmação para ajudar a aluna a finalizar a apresentação:

> Prof.ª- Então o anúncio era verdadeiro ou falso?
> Mara- Era verdadeiro porque tinha mais do que 20 pizas.
> Prof.ª- Muito bem... chegaram à conclusão que era verdadeiro porque conseguiram fazer 26 pizas diferentes.

Seguiu-se a comunicação de um outro porta-voz: Tomás (ver Figura 10). Ele foi solicitado pela professora uma vez que nenhum elemento do grupo se dispôs a tal.

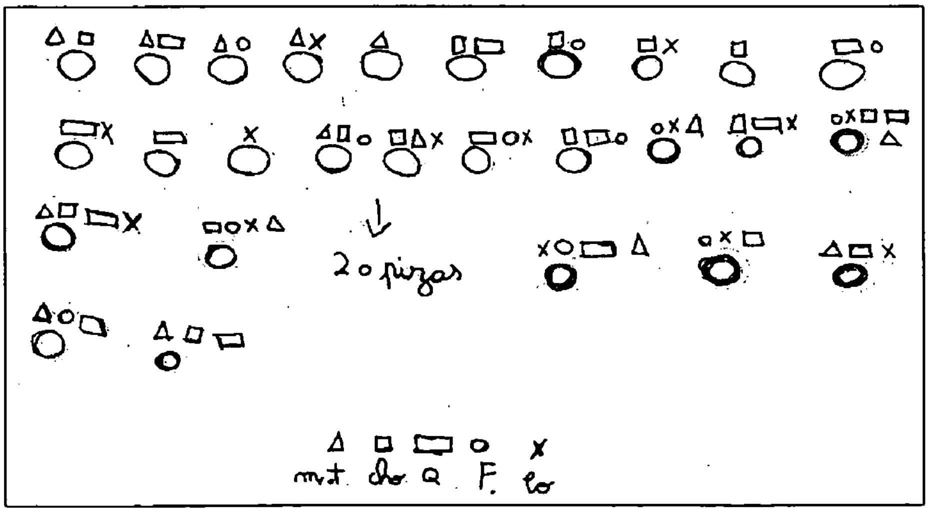


Figura 10 – Estratégia utilizada por Daniel e por Tomás.

Tomás é um aluno com bom raciocínio, mas que se expressa oralmente com pouca clareza acerca de acontecimentos vividos ou imaginados. Como tal, a professora sentiu necessidade de o apoiar e de lhe conduzir constantemente a verbalização das ideias:

> Tomás- Desenhámos as 20 e fomos metendo... os ingredientes.
> Prof.ª- Fizeram por símbolos matemáticos, não foi?
> Tomás- Foi, mas não são iguais... os ingredientes.
> Prof.ª- Tudo bem, mas usaram os símbolos, não foi? Explica lá.
> Tomás- Na primeira piza...
> Prof.ª- Espera, primeiro escolheram os símbolos, não foi? Formas geométricas. Aqui está a legenda com os símbolos dos ingredientes que eles escolheram: o triângulo...

De seguida, Ana pediu também a Daniel que explicasse o seu modo de trabalhar já que a estratégia tinha sido a mesma, mas o trabalho independente.

Daniel, ao contrário de Tomás, expressava-se oralmente com clareza, conduzindo bem o seu raciocínio e Ana, aproveitando essa facilidade do aluno, procurou que ele clarificasse as suas ideias à turma:

> Daniel- Eu primeiro fiz 20 pizas e depois fiz o triângulo com todos, depois fiz o triângulo sózinho; depois fiz o quadrado com todos e sózinho e sempre assim e depois vi que ainda conseguia fazer mais com 3.
> Prof.ª- Mais com 3?
> Daniel- Sim. 3 ingredientes em cada piza porque ainda não estavam todas com 3.
> Prof.ª- Aqui estão, vêem? 1...2...3...4.

Daniel comunicava facilmente o seu pensamento aos colegas e à professora e esta sintetizava todo o raciocínio do aluno, ajudando-o na finalização do mesmo, porque o tempo urgia:

> Daniel- Mas eu depois vi que podia fazer mais, porque eu não tinha com 4, tinha só com 1 ingrediente, com 2, com 3 e com 5 e não tinha com 4...
> Prof.ª- Perceberam o que ele disse? Reparem nos símbolos. Ele diz que começou por desenhar 20 pizas [aponta para elas] e que depois foi combinando os símbolos uns com os outros sem os repetir. Mas a certa altura eu disse-lhes que eles precisavam de funcionar como se fossem inspectores e que tinham de ver se se podia fazer mais de 20 pizas diferentes. E eles foram tentar...

Seguidamente, Ana perguntou a Daniel e a Tomás a que conclusão tinham chegado, e o aluno respondeu com convicção, mostrando efectivamente ter compreendido o problema:

> Daniel- Que é verdadeiro.

Prof.ª- Como sabes?
Daniel- Então eles diziam que faziam mais de 20 pizas diferentes e eu consegui fazer 27. Então é verdadeiro.
Prof.ª- E tu Tomás?
Tomás- Verdadeiro... consegui 25.

Sabendo que Bela e Sara tinham optado por outra forma de registo, Ana procurou valorizar o seu trabalho, deixando que a turma validasse a estratégia seguida por Bela (ver Figura 11):

Bela- Nós escolhemos os ingredientes e depois fizemos a massa das pizas e depois desenhámos os ingredientes.
Prof.ª- Olhem para ali, estão a ver o que ela está a dizer?
Mara- Professora, não se percebe muito bem!
Prof.ª- Pois é, Bela. Íamos precisar de muito tempo para conseguir ler o que fizeram, sabes porquê? Porque os desenhos que vocês escolheram não se percebem muito bem. Da próxima vez que escolherem esta estratégia do desenho têm de desenhar símbolos simples, para todos entenderem o que querem dizer, está bem? E, quantas pizas fizeram?

Ana percebia que as alunas tinham tido muitas dificuldades neste processo. Como tal, sintetizou ela mesma o trabalho:

Bela- Fizemos 22.
Prof.ª- E então, o anúncio é verdadeiro ou falso?
Bela- É verdadeiro.
Prof.ª- Pois é, mais de 20 pizas diferentes, podem ser 21, 22, 23, etc. Se aquelas pessoas conseguem fazer pelo menos 22 pizas diferentes, o anúncio é verdadeiro.

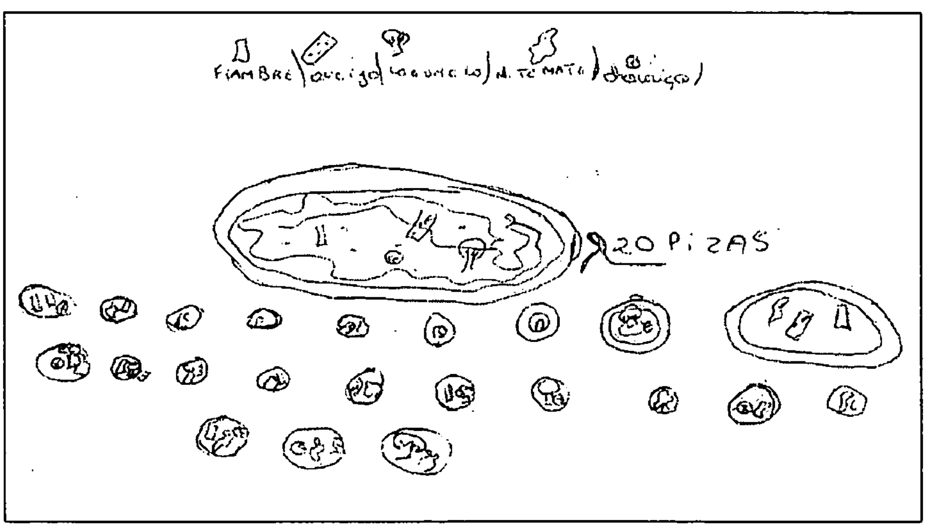


Figura 11– Estratégia utilizada por Bela.

Pelo que se pode ver no seu registo (ver Figura 12), Sara não percebeu o problema, uma vez que repetiu os desenhos em quase todas as pizas, variando apenas a quantidade de figuras desenhada, e onde dificilmente se encontram combinações. Evidência disso é a opinião que deu sobre a tarefa: "este problema para mim foi muito difícil". Bela acrescentou ainda "...mas foi muito divertido" e Tomás e Daniel afirmaram "foi fácil e divertido". A análise dos dados indica que Bela quase se opôs à resolução do problema, acabando por completá-la com muito apoio da professora, no entanto, sabe ser uma aluna correcta dando uma opinião socialmente correcta.

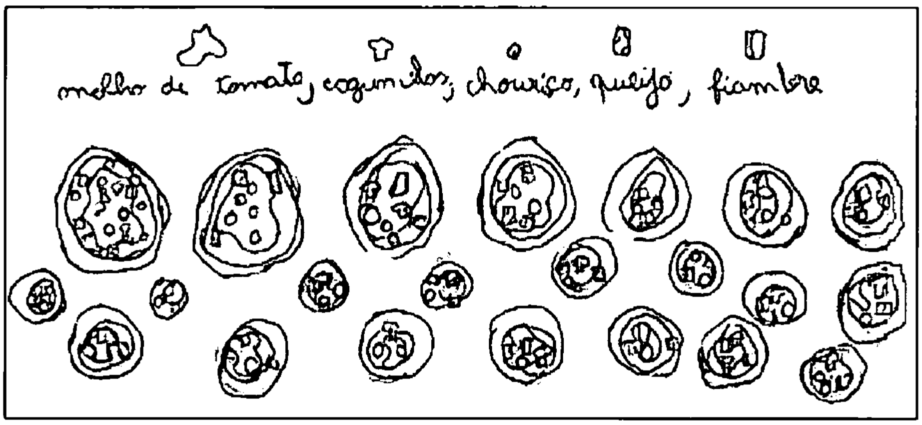


Figura 12 – Estratégia utilizada por Sara.

Seguiu-se a vez do grupo da Jacira comunicar à turma qual tinha sido "a estratégia do grupo para descobrir se o anúncio era verdadeiro ou falso". Ana elogiou este grupo por ter trabalhado colaborativamente muito bem e por ter desenvolvido um trabalho muito interessante e cheio de cor (ver Figura 13).

O grupo tinha escolhido os cinco ingredientes e atribuíra-lhes cores. A professora mostrava-se muito atenta à verbalização feita pela aluna, apoiando-a sempre que precisava:

> Prof.ª- Estão a ver, eles não trabalharam com símbolos nem com desenhos, trabalharam com cores. E depois?
> Jacira- Depois escrevemos um P de piza e à frente a cor...
> Prof.ª- Espera, é preciso dizeres que fizeram grupos de pizas. Estão a ver aqui, por exemplo, têm o grupo das pizas com um ingrediente, depois...
> Jacira- Depois, fizemos o grupo das pizas com dois ingredientes, com 3 ingredientes, com 4 ingredientes e com 5 ingredientes.

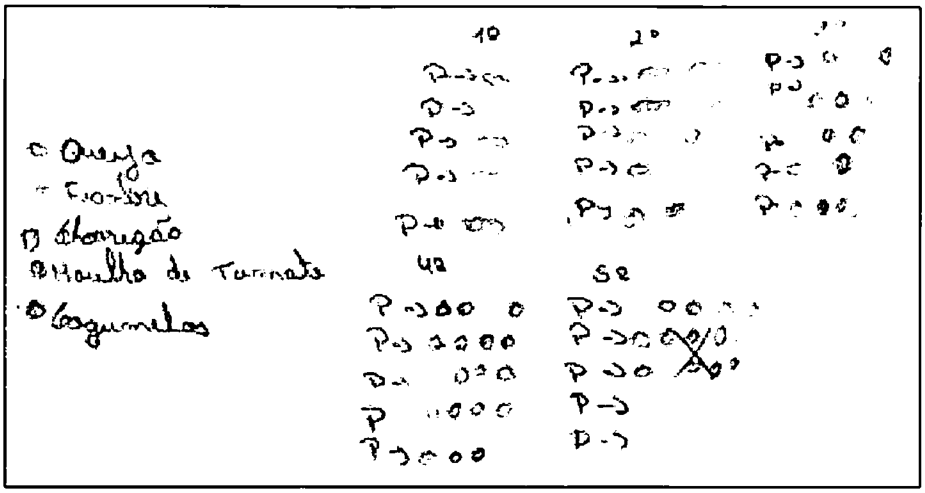


Figura 13 – Estratégia utilizada pelo grupo de Jacira.

Ana mostrava-se entusiasmada com a estratégia apresentada, solicitando-lhe que a esclarecesse sobre uma acção realizada em grupo:

> Prof.ª- Jacira, explica lá aos teus colegas porque é que têm duas pizas de 5 ingredientes riscadas.
> Jacira- Então, quando nós estávamos a fazer com cinco, olhámos para cima e vimos que tinham as mesmas cores, assim eram iguais e não podia ser.
> Prof.ª- Pois é, a combinação de cores era a mesma. Então, quantas pizas diferentes conseguiram fazer?
> Jacira- 21.

Para finalizar a apresentação de estratégias à turma, foi a vez de Dario apresentar a que o seu grupo adoptara (ver Figura 14). Este grupo fez duas tentativas de resolução. Na primeira, os alunos começaram por fazer uma representação simbólica das pizas e dos ingredientes e faziam combinações com símbolos e abreviatura de nomes, sem qualquer critério. Concluindo que seria difícil, ordenaram então 22 combinações de ingredientes em que entrava sempre um deles: o molho de tomate. Curioso foi verificar que este grupo também não tinha sido crítico quanto às combinações que fazia, isto é, para além de se terem baseado na realidade em que todas as pizas têm molho de tomate, repetiram combinações:

> Dario- Nós primeiro fizémos os ingredientes e os símbolos e depois vimos que era muito difícil e escolhemos só um bocado do nome deles...
> Prof.ª- Sim, dois códigos ao mesmo tempo fica muito confuso. E depois?
> Dario- Depois, escrevemos 1.ª e escrevemos molho de tomate, fiambre e cogumelos, depois metemos 2.ª e escrevemos molho de tomate queijo e cogumelos e sempre assim.

Constatando que algo de irregular acontecia naquelas combinações, para além de ver sempre um dos ingredientes em todas, a professora teve a preocupação de solicitar que as confirmassem. Pela primeira vez, Ana verificava junto dos alunos o resultado obtido por um dos grupos, fazendo com que os alunos se debruçassem curiosamente sobre o registo do grupo:

Prof.ª- Vejo que conseguiram fazer 22 pizas, mas agora reparem o que acontece com as combinações que o grupo fez!
Manuel- [euforicamente] Professora, já descobri! a 1.ª e a 12.ª são iguais.
Mara- E a 3.ª e a 14.ª também.
Júlio- Oh! a 19.ª é igual à 22.ª.
[O grupo ficou admirado, não tinha verificado o resultado e as pizas estavam repetidas.]

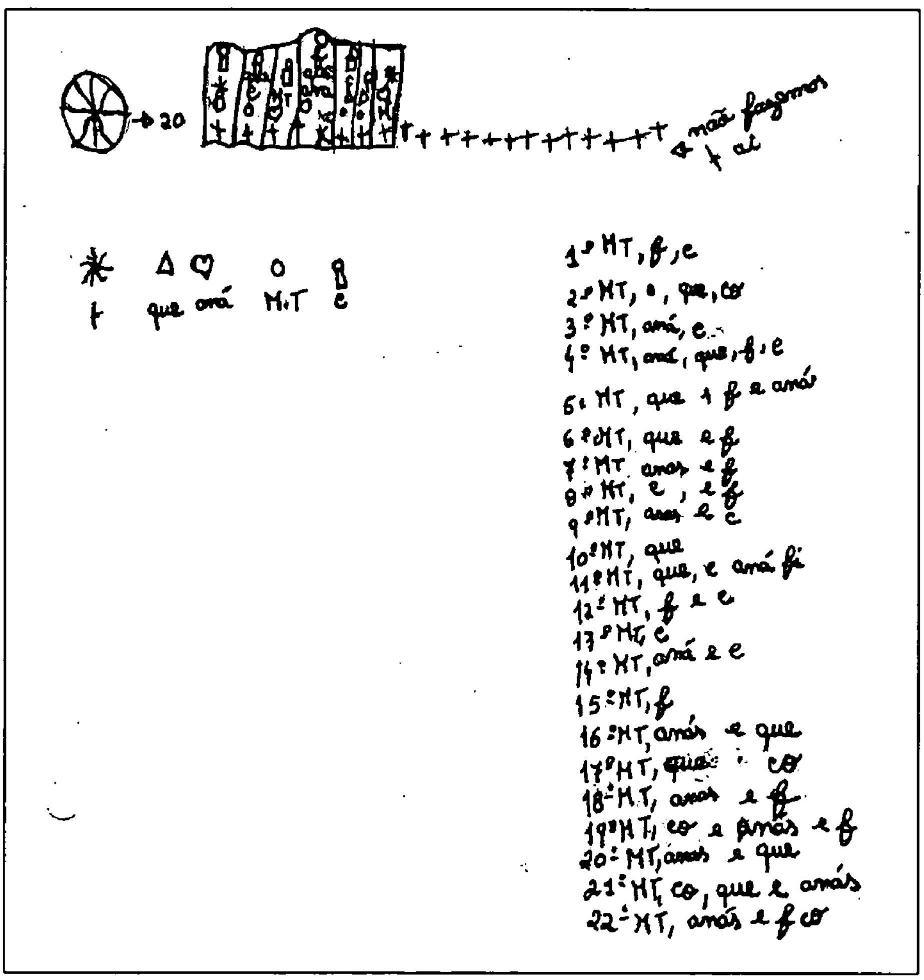


Figura 14 – Estratégia utilizada pelo grupo de Dario.

A partir do momento em que lhes tinha sido dada a oportunidade de criticamente interpretarem os resultados, os alunos faziam-no com grande estímulo. Os seus olhos percorriam a projecção do registo na ânsia de encontrarem outras descobertas e Ana deixava perceber um sorriso que só podia revelar felicidade por ver como os alunos estavam motivados e participativos:

Prof.ª- Então, o que é que se passa agora, Jacira?
Jacira- Agora... há pizas repetidas
Prof.ª- Será que o grupo pode dizer se o anúncio é verdadeiro ou falso?
Vários alunos- Não.
Prof.ª- De que precisavam, para conseguir dizer isso?
Jacira- Primeiro ver se têm mais repetidas e depois, fazer as pizas que faltam.

Ana sintetizou as comunicações feitas pelos alunos, elogiando a forma como alguns grupos tinham trabalhado colaborativamente. Realçou também a necessidade de cada um de nós respeitar os colegas e de resistir aos sentimentos de frustração para se obter sucesso na nossa vida em sociedade.

Posteriormente, Ana apresentou a sua estratégia que se pode ver no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 - *Estratégia Apresentada pela Professora para Encontrar o Número Total de Pizas*

n.º de ingredientes	0	1	2	3	4	5	
Combinações possíveis com os ingredientes A,B,C,D,E	MASSA ou BASE	A B C D E	AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE	ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE	ABCD ABCE ABDE BCDE ACDE	ABCDE	
n.º de pizas diferentes	1	5	10	10	5	1	32 (TOTAL)

Nesse quadro estavam registadas todas as possibilidades/combinações possíveis. A sua leitura foi rapidamente realizada:

> Prof.ª- Reparem, escolhemos para as nossas pizas os ingredientes A,B,C,D,e E. Na linha de cima está a quantidade de ingredientes (...). Ao todo posso fazer 31 pizas diferentes com 5 ingredientes, uma vez que não podemos considerar só a massa como uma piza. Agora, tudo isto está certo matematicamente falando, porque na realidade quem é que vai pedir uma piza que só tenha a massa e um ingrediente?!
> Concluindo: se o anúncio fosse "mais de 30 pizas diferentes", também era verdadeiro, porque se conseguem fazer 31.
> Todos os meus amigos trabalharam bem, só que alguns precisavam de tomar mais atenção para ver se não se repetiam.

Comentário global

Na pizaria é uma tarefa composta por um enunciado muito simples, mas pouco estruturado, em que o vocabulário usado pode ter influenciado o desempenho dos alunos no primeiro contacto com o problema.

Confrontar estas crianças com uma experiência de resolução de problemas que não era apoiada nem no cálculo, nem no recurso a operações, levou-os a encararem a tarefa como um pouco estranha, como foi o caso de Bela e Sara ao afirmarem "achas que é possível ... 20 pizas diferentes?" ou "ele tem de comprar muita massa!". Estas duas alunas mostraram evidentes dificuldades em atribuir sentido ao que liam ou ouviam ler, pois, embora aparentemente tivessem compreendido a situação, nomeando os ingredientes escolhidos para as pizas e identificado as diferenças no exemplo análogo dado pela professora, mostraram dificuldades em saber o que fazer com a questão "digam se o anúncio é verdadeiro". Porém, enquanto que Bela necessitou apenas que a professora lhe colocasse um conjunto de questões para que ela se envolvesse de algum modo na resolução e fosse capaz de encontrar uma solução para o problema, Sara precisou de mais tempo para o conseguir compreender.

Na terceira parte da aula foram criadas condições para que os alunos aprendessem a usar, a interpretar e a reflectir sobre a simbologia criada (pictórica ou não) para abreviar as suas imagens mentais dos ingredientes das pizas. Pois, no caso dos grupos de Mara e Jacira e de Daniel e Tomás, os símbolos tinham sido claramente definidos e foram usados com significado e compreensão, ao contrário do caso de Bela e Sara que criaram símbolos que vieram a verificar-se pouco eficazes na resolução do problema. Assim, esta resolução de problemas permitiu-lhes aprenderem a utilizar estratégias diferentes para encontrar uma solução, como as que os grupos apresentaram ou a tabela apresentada por Ana e ainda a explicitarem oralmente e a representarem por escrito os passos seguidos na estratégia adpotada.

Quanto à resolução de problemas pode dizer-se que as quatro fases não foram integralmente percorridas durante o processo. Pois, falando apenas em relação ao grupo em foco, Bela e Sara parecem não ter compreendido o objectivo do problema já que revelaram dificuldades na concepção e implementação de estratégias para o resolver, mesmo que isso se tivesse ficado a dever, em parte, a uma certa falta de vontade e de sentido crítico na avaliação do seu trabalho. Durante a 3.ª parte da actividade pedagógica, foi examinada a solução de um dos grupos, tendo-se verificado da parte de alguns alunos da turma grande espírito de descoberta e entusiasmo pelo trabalho que estava a ser desenvolvido.

Em relação ao trabalho em grupo pode dizer-se que os alunos participantes não conseguiram trabalhar de uma forma produtiva em conjunto, dividindo-se por sexos. Enquanto as raparigas do grupo, Bela e Sara, pareciam não ter confiança nas suas capacidades para resolver problemas, trabalharam a pares, mas com pouco interesse e empenhamento nesta actividade, os rapazes, Tomás e Daniel, pareciam ter uma competência prática superior às delas, mostraram-se autónomos e trabalharam bem individualmente.

Apesar do trabalho em grupo ter evidenciado algum entusiasmo no início da actividade, ele teve os seus problemas. É notório que nem todos os elementos do grupo se entenderam bem na resolução desta tarefa, resolvendo começar a trabalhar cada um por si, como foi o caso de Daniel e de Tomás. Afinal, é compreensível, pois, o facto de se estar à volta de uma mesa não implica que os alunos cooperem sempre entre si. Factores da personalidade podem ter sido o motivo principal para o tipo de interacções estabelecidas entre os alunos. Outra razão pode ter sido o facto de Tomás verbalizar com pouca clareza as suas ideias, diminuindo assim a sua credibilidade junto dos restantes elementos do grupo por não ser bem entendido por todos, ou ainda, devido aos resultados obtidos por cada um, na avaliação dos conteúdos, ao longo das aulas, conforme chegaram a referir. A dificuldade de Bela em se relacionar com Tomás continua patente. Apesar da professora apelar constantemente ao trabalho colaborativo dentro dos grupos, a definição de estratégias de resolução para esta tarefa foi tomada individualmente pelos dois elementos de competência matemática diferente: Daniel e

Bela. Como a implementação dessas estratégias pressupôs a realização de processos ainda pouco conhecidos, tendencialmente, Daniel executou-as individualmente como que a testar as suas ideias e Tomás seguiu-o. O par dos rapazes utilizou os símbolos criados como um importante auxiliar do seu raciocínio matemático, sabendo dar-lhe significado do que estava a ser representado, enquanto que Bela e Sara mostraram sentir dificuldades em perceber esse significado. Por seu lado Bela, que reconhece Daniel como sendo matematicamente competente, brinca com tudo e com todos, levando o trabalho muito pouco a sério, não conseguindo propor, defender e argumentar uma estratégia de resolução nestas sessões. A sua insegurança em resolver problemas, aliada ao reconhecimento de que Daniel é bom resolvedor de problemas, tornam-na dependente dele e a brincadeira talvez numa forma de não reflectir muito no que está a fazer. Quanto a Sara, tem-se mostrado tão insegura face à resolução de problemas que todas as sugestões dadas por outros são aceites por ela.

A comunicação entre os diversos intervenientes no processo de resolução deste problema, foi feita sobretudo através da oralidade em que o número de interacções aluno-aluno foi muito inferior às de professora-aluno. Sendo que, durante a 1.ª e a 3.ª partes da actividade pedagógica, se verificaram sempre interacções verticais e, durante a 2.ª parte da actividade horizontais a maior parte do tempo. A comunicação escrita limitou-se aos registos da resolução do problema e à resposta dada sob a forma de frase, pelos alunos e serviu de apoio aos alunos na terceira parte da aula.

Dos quatro grupos, três escolheram a representação icónica e um a linguagem natural para suportar o seu pensamento. Relativamente à comunicação das estratégias, à turma, fica a ideia de que os alunos não têm nem o hábito de interpelar os colegas acerca do trabalho apresentado, nem de o defender. Mas, se for encontrado um pequeno erro na execução do plano e a professora estimule a avaliação dos resultados, os alunos são mais observadores e interventivos.

Durante as interacções da professora com os alunos, verificou-se da sua parte uma maior intenção de controle quando está frente à turma, dirigindo as questões a um aluno de cada vez na 1.ª e 3.ª parte da actividade, do que quando está em pequeno grupo com os alunos, colocando uma nova questão na sequência de uma resposta ou solicitando justificações aos alunos do grupo. As resoluções dos grupos são apresentadas à turma como produto acabado de descobertas feitas por eles e validadas pela professora, não se observando da parte dos outros alunos uma crítica ou uma outra interpretação dos resultados exibidos.

Relativamente à comunicação entre os alunos, ela só se verificou durante o trabalho de grupo, para se levar a cabo a resolução do problema, para pedir ajuda ou ajudar; e com a professora também para pedir ajuda ou colocar dúvidas que surgem das discórdias do grupo ou ainda quando terminam o trabalho.

Muitas vezes se percebeu também a necessidade da professora completar ou sintetizar a informação, determinando momentos de ensino à posteriori para regular e aperfeiçoar as aprendizagens.

4. *Fósforos e mais fósforos*

1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma

Para iniciar a aula de resolução de problemas, Ana declarou que a tarefa desse dia apelava ao uso de material (ver Quadro 3.2). Os alunos ficaram expectantes olhando sem perguntas e em silêncio a professora que continuava a apresentar o material a usar na resolução da tarefa que lhes era proposta. A professora geria totalmente a situação.

Nesta parte da actividade, ao contrário do que vinha sendo habitual, a professora não leu nem deu a ler o enunciado da tarefa.

Assim, como quem narra uma história, fez uma exposição do tipo de material com que os alunos iriam trabalhar, falando também do que teriam de fazer na folha de trabalho para levar a cabo aquela tarefa. Mencionou as figuras que se viam na folha, tentando ao mesmo tempo traduzir o enunciado do problema de maneira mais objectiva e adequada, a seu ver, às crianças deste nível etário. Enquanto se dirigia a elas, carinhosamente, utilizava o termo *sequência de figuras*, e logo partilhava o seu significado, de forma repetida, com a intenção de fazer compreender o problema proposto:

> Prof.ª- ...os meus amigos olham para a 1.ª parte onde está escrito assim: *em cada uma das sequências de figuras...* E o que são as sequências de figuras? Neste caso, uma sequência é um conjunto de figuras que seguem uma ordem. Aqui temos as sequências A, B, C, D. Há 4 sequências de figuras: A A, a B, a C e a D [escreve no quadro]. Por baixo de cada sequência de figuras há sequências de números . Conversam também sobre elas e descobrem de que falam.
> Os meus amigos agora, só vão trabalhar a sequência A, a dos triângulos. As sequências B C D, não são para agora [tapa com uma folha branca], para este momento. É para o

> momento seguinte. Portanto, quando receberem esta folha, podem observar tudo, é óbvio, mas só vão dar grande atenção à sequência A, certo?...

Durante a sua exposição a professora teve o cuidado de explicar que quantidade de material estava atribuído a cada grupo e que tarefa teriam de resolver com o material em questão. Estabeleceu com os alunos um plano de resolução e seleccionou estratégias para executar o plano. Não esqueceu também, o estimulo à comunicação entre os alunos:

> Prof.ª- ... Então, depois de em grupo observarem a sequência A que foi construída com fósforos, os meus amigos vão tentar construir com aquele material a figura que vem a seguir. Depois, vão conversar, pensar em grupo sobre a 3.ª figura: "o que é que esta figura tem desenhado?", "Quantos fósforos há em cada uma das figuras". E, quando acabarem de conversar sobre a 3.ª figura, começam a construir a 4.ª, em grupo.

Percebia-se que Ana reforçava as directrizes com a intenção de esclarecer qualquer dúvida que pudesse persistir nos alunos, mas também de gerir a situação pedagógica e didáctica. Dava-lhes ideias para conseguirem resolver o terceiro ponto[8] do problema, sugerindo-lhes que podiam, por exemplo, "pensar no perímetro das figuras" ou "como é que foi construída? Será que tem mais fósforos ou que tem menos?".

Incentivando constantemente o trabalho colaborativo entre os alunos, Ana recorreu a uma unidade de medida não convencional quando mostrou um exemplo próximo para continuar a ajudar os alunos a resolver o problema principal:

> Prof.ª- ... Por exemplo, se eu quiser medir o perímetro deste estojo sem régua, utilizo os meus dedos: escolho 4 deles e meço o seu perímetro. [E passou à prática. Os alunos faziam ao mesmo tempo a contagem de 4 em 4] (...) Aqui, na figura 2 também pode haver o perímetro. Depois, em grupo vão descobrir, certo? Aqui na figura 3 também pode haver um perímetro! Há ou não? Há com certeza, descobrem essa medida mas sem a régua.

Depois de ter perguntado aos alunos se tinham alguma dificuldade e de ter obtido resposta negativa, a professora procedeu à distribuição das folhas de trabalho pelos grupos e com os alunos ainda em silêncio, deu início à segunda parte da actividade.

[8] "- Descrevam a relação que encontraram entre as figuras e os valores de cada uma das sequências numéricas que estão por baixo de cada uma."

2.ª parte da actividade: resolução do problema pelo grupo em foco

Bela, Sara e Tomás esperavam que Daniel tomasse a iniciativa de começar a resolver o problema, conferindo-lhe a popularidade que todos sabiam ter, incluindo ele próprio.

Daniel iniciou então a leitura do enunciado, em voz alta. Parecia entusiasmado pela proposta. Cada um dos alunos mostrava interesse por aspectos diferentes da tarefa: Daniel optava por fazer a leitura das sequências numéricas de cima para baixo e da esquerda para a direita para tentar descobrir algo, Bela mostrava preferência por começar a construção das figuras, Tomás pensava no número de fósforos necessários à construção da 4.ª figura da sequência A e Sara pretendia dar uma resposta não identificando os triângulos iguais do ponto de vista da constância perceptual colocados com orientação diferente:

> Daniel- Vamos falar sobre isto que está aqui: 1-3-4...
> Bela [interrompendo Daniel]- É mais fácil fazer que conversar!
> Tomás- Para o outro vão ser precisos mais 12.
> Sara- Escrevemos assim: a 1.ª figura é constituída por um triângulo, a 2.ª figura é constituída por 3.

Ao ouvir Sara, Daniel tentou contar não só os triângulos pequenos, ou seja as unidades de área, mas o total de triângulos de cada figura, mas não teve o apoio nem de Bela, nem do grupo. Podia ser essa a nova sequência numérica pedida no enunciado.

> Daniel- Isto [apontado para a 2.ª] é um triângulo.
> Bela- Olha lá, a 2.ª figura não é construída por um triângulo só!
> Daniel- Construída não, constituída! Vê lá, este pode ter mais, mas olha lá como é a forma dele, é um triângulo!

Bela mostrava alguma confusão na distinção entre figuras e sólidos geométricos ao tentar corrigir Daniel, dizendo: "pirâmide!... Ah não, a pirâmide é um bocadinho mais larga", mas nenhum dos colegas valorizou a sua questão.

O grupo sentia dificuldade em iniciar a conversa pedida pela professora sobre as figuras e, por isso, resolveram passar à construção da 4.ª figura com Daniel a tomar a primeira decisão e Bela a ordenar a execução do plano:

> Daniel- Olha, *bora* começar a construir...
> Sara- Já falámos!!....
> Bela- Vá, cada um põe um triângulo.

Daniel- Ponham as folhas aqui para termos mais espaço.

E, ainda que Tomás sugerisse acertadamente que necessitavam da folha para o desenvolvimento dos trabalhos, Daniel, habituado a que aceitassem as suas ideias não queria reconhecer que Tomás estava certo:

Tomás- Como é que sabemos como é que são? Precisávamos de uma folha...
Daniel- A Bela vê ! Vá, quantos é que é preciso para fazer a 2.ª?

Rapidamente os alunos decidiram dividir tarefas, o que parecia curioso. No entanto, cada um deles acabou por fazer uma figura, não numa atitude individualista mas para manipularem o material durante mais tempo. Ana, atenta ao desenrolar do trabalho dos alunos, logo chamou a atenção para a necessidade de haver colaboração entre o grupo. Novas interacções acabaram por acontecer: Daniel, como mais popular, fez uma proposta que foi aceite pelos colegas; Tomás, o menos popular, fez também uma proposta que foi imediatamente aceite por Daniel e Sara deu também a sua contribuição, acabando por se empenharem todos naquele trabalho:

Daniel- Cada um faz um triângulo! Eu faço o de cima.
Tomás- Não, é melhor começar por baixo!
Sara- Eu faço o deste lado e tu fazes o desse lado Bela.
Daniel- Yá, yá é melhor começar por baixo.

Daniel procurava orientar os colegas promovendo as suas capacidades espaciais:

Daniel- Todos formam um triângulo; a forma triângulo é só uma , só que este é maior! É formado por mais triângulos. E este ainda é maior!

Estabeleceu-se entre Sara e Bela um tipo de interacção simétrica assente na negociação recíproca em que uma procurou convencer a outra. Sara pretendia construir a 3.ª figura a partir do número de triângulos pequenos/unidades de área da base do triângulo anterior e Bela já pensava na figura seguinte, ou seja na 4.ª, acabando por chegar a acordo:

Sara- Então agora são 3 em baixo.
Bela- Temos que acrescentar mais. Acrescentamos aqui 3, aqui 2 e aqui mais 1
Sara- Não!
Bela- Se aquele tem 3, este tem 4
Sara- 1,2,3, está certo! 1, 2, 3, está certo!
Bela- Mas nós temos de fazer outro, por isso temos de fazer mais um.

Por vezes existiram alguns entraves na comunicação das ideias entre os alunos que parecem dever-se ao facto de não ter sido usado o vocabulário próprio para explicitar relações entre duas figuras.

Os diálogos que se seguem, acerca da sequência de figuras A, evidenciam a procura de uma regularidade que permitisse saber qual seria a figura seguinte:

> Daniel- Então e como é que sabes qual é a figura que vem a seguir a esta?
> Sara- Fazemos mais para ela ficar com a mesma forma.
> Bela- Este tem dois, este tem um, tens de acrescentar aqui 3 [da sequência A]
> Sara- Não, não, não, não. Aqui 4 em baixo.
> Daniel- Ó Bela tem de ser 4!
> Bela- Yá, para a que vem a seguir , é!

Tomás tinha interagido pouco verbalmente com o grupo, até ao momento, e continuava ainda com uma atitude individualista enquanto trabalhava. Mas se umas vezes a sua atitude incomodava o grupo, noutras, a situação era encarada na brincadeira, através de expressões como "ó pá [Tomás], já vais bué rápido! És o homem dos palitos!".

Enquanto Daniel e Sara ainda resolviam a primeira parte da tarefa, Bela solicitou a orientação da professora, tentando compreender o passo seguinte. A professora, primeiro, procurou saber em que ponto da resolução estavam e depois incentivou os alunos a lerem o enunciado. Foi deste modo que percebeu a existência de dificuldades na compreensão do que estava escrito. Então, partilhou com os alunos o significado da expressão *sequência numérica* dando o exemplo de uma sequência numérica bem conhecida de todos:

> Prof.ª- Então agora diz assim: "continuem as sequências numéricas que estão por baixo das figuras". Onde estão as sequências numéricas? Quer dizer, onde está a série de números?
> [Como não obtém resposta a prof.ª continua ...] Um exemplo de sequência numérica é: 2-4-6-8.... Conhecem esta sequência?
> Tomás- Sim, são os números pares.
> Prof.ª- Então onde estão as sequências numéricas faladas no texto do problema?
> Bela- Aqui [apontando para as sequências numéricas].

Também tentou que os alunos encontrassem a partir das figuras geométricas formadas pelos fósforos, regularidades em sequências numéricas que lhes permitissem trabalhar com perímetros e áreas, assim, ao colocar estes conceitos em confronto os alunos podiam mais facilmente distingui-los.

A professora, colocava as questões ao grupo procurando orientar o pensamento dos alunos para a descoberta das relações existentes entre essas sequências numéricas e a sequência de figuras A. Quando Tomás confundiu rectângulos com triângulos percebeu-se que a professora receou de novo ajudar demais, acabando por se afastar do grupo:

> Prof.ª- Pronto, se aqui estão duas, temos de analisar uma de cada vez [pega numa régua opaca e tapa a 2.ª]. Agora vocês tem de perceber a que diz respeito estes números: 1-4-9... De que fala esta sequência? 1 quê? 4 quê? 9 quê?
> Tomás- Rectângulos.
> Prof.ª- Rectângulos? Vá, observem bem as sequências e as figuras para ver como é que umas se relacionam com as outras. Pensem no nome destas figuras.

A primeira sequência tinha sido deixada para trás.

Bela solicitava a presença da professora, de braço no ar, relativamente à segunda sequência numérica. A aluna formulava uma conjectura ao afirmar a propósito dessa sequência: "esta é 3... faces". Era a segunda vez que confundia figuras com sólidos.

A professora estabeleceu com a aluna um modo de interacção assimétrica que a levou a reflectir sobre as suas ideias e a concluir que não estava certa, como evidenciam os diálogos:

> Bela- Esta [a 2.ª sequência] é 3 ...faces.
> Prof.ª- E a seguinte? 6 faces, também? [como Bela não responde, continua] ter faces é uma característica das figuras geométricas?
> Bela- Não. Ai não pode...
> Prof.ª- Então, digo que esta figura tem 3....
> Bela- ... Paus!

A sua preocupação foi orientar a aluna para a confirmação do que acabava de referir:

> Prof.ª- E a seguinte?
> Bela- tem 6
> Prof.ª- E a terceira?
> Bela- 9

Entretanto, Daniel formulava nova conjectura ao afirmar que a segunda sequência numérica correspondia ao número total de fósforos utilizados na construção de cada figura. Estabeleceu-se nova interacção assimétrica entre a professora e o aluno, solicitando-lhe esta que verificasse a resposta, comprovando assim não ser verdadeira a sua conjectura:

Prof.ª- Dizes que nesta 2.ª figura estão 6 fósforos ao todo?
Daniel- Sim.
Prof.ª- De certeza?... Conta-os lá!
Daniel- 3...6...,são 9.
Prof.ª- Então o que é seis?
Daniel- São os fósforos à volta! Os pauzinhos à volta.

Ao identificar a relação entre essa sequência e a sequência de figuras a ela associada surgiu a noção de perímetro. O significado foi então partilhado com os alunos à medida que se certificavam que esse passo da resolução estava correcto:

Prof.ª- E à volta é o quê? Como é que se chama a isso "à volta?"
Daniel- O perímetro.
Prof.ª- Então vamos confirmar: esta 1.ª figura tem 3 fósforos de perímetro; esta 2.ª ...
O grupo- ...a 2.ª tem 6 fósforos de perímetro e a 3.ª tem 9 fósforos de perímetro.

Na continuação do apoio dado ao grupo, a professora lançou-lhes novos desafios: "vejam agora se descobrem, sem contar um a um e sem olhar, quantos fósforos tem a figura que construíram". Os rapazes, que estavam nesse momento mais comunicativos, não conseguiram resistir. Olharam ambos para a figura, mas Tomás foi muito rápido a dizer "12". A rapidez da resposta levou a professora a inquiri-lo para tentar perceber como é que ele tinha pensado para resolver o problema. Percebemos, então, que Tomás, embora tivesse olhado para a figura construída e calculado o número de fósforos do perímetro através da adição de parcelas iguais ou da multiplicação a ela associada, tinha compreendido a regularidade da sequência numérica em causa. Estava assim subjacente o que poderia conduzir à formulação de uma conjectura, como evidenciam os diálogos:

Prof.ª- Como chegaste a essa resposta?
Tomás- Eu calculei estas partes [n.º de fósforos utilizado em cada lado da figura] e fiz a conta de cabeça.
Prof.ª- E se não a tivéssemos construído, como poderíamos saber?
Tomás- Era só somar 9 mais 3 [apontando para o último número da sequência]... sempre mais 3.

Nesta parte da actividade, a professora incentivou a autonomia dos alunos bem como o registo das suas ideias, tentando que resolvessem a maior parte da tarefa sem ela interferir:

Prof.ª- Então já sabem a que diz respeito esta sequência? A que é?
Tomás- Ao perimetro.
Prof.ª- Então registem. E descubram sobre o que é a primeira sequência numérica.

Era preciso pensar na relação que existia entre a primeira sequência numérica e a sequência A e, antes que a professora se afastasse, Tomás chamou a sua atenção. Ana procurou apoiar os alunos que se mostravam mais inseguros ou com mais dúvidas, como era o caso deste aluno que persistia em dizer que as unidades de área da sequência A se chamavam "rectângulos" em vez de "triângulos". A professora questionou-o para o ajudar a clarificar o seu próprio pensamento e a completar parte do trabalho:

> Tomás- São os rectângulos.
> Prof.ª- Rectângulos? O que são os rectângulos?
> Tomás- Sim isto [apontando para a primeira figura].
> Prof.ª- E essa figura como é que se chama mesmo?
> Tomás- Ah! Triângulos!

Sempre que se avança na resolução de um problema devem verificar-se os passos e era isso que a professora fazia, solicitando ao grupo que demonstrasse que a ideia do número de triângulos se confirmava. Mas como se pode ver pelo diálogo, Tomás reduz ao mínimo o vocabulário a usar:

> Prof.ª- Então, verifiquem se o que o Tomás disse se confirma.
> Tomás- 1 aqui [na 1.ª figura] e agora 1-2-3-4 aqui [na 2.ª figura] e 1-2-3-4-5-6-7-8-9 aqui [na 3.ª figura].

A professora colocou de novo uma questão que pode ter levado, por um lado, à clarificação do pensamento dos alunos, por outro à confirmação de que eles perceberam a relação existente entre a primeira sequência numérica e a primeira sequência de figuras a ela associada. A validação da resposta dada pela aluna foi feita pela professora de dois modos: primeiro, através da sua expressão facial e depois, pelo reforço positivo das palavras:

> Prof.ª- Então, 1-4-9- quê?
> Sara- Rectângulos!
> [A professora fechou os olhos e a boca em sinal de rejeição e Sara corrigiu imediatamente]
> Sara- Triângulos.
> Prof.ª- Triângulos... Triângulos! Muito bem... Escrevam agora o que representa esta sequência...

De seguida, através de questões de focalização, a professora encaminhou os alunos para a parte final desta tarefa e que era tentar encontrar uma nova sequência numérica que se pudesse relacionar com as figuras. Aqui, os alunos estavam dispostos a trabalhar colaborativamente com a professora, mas esta queria perceber como é que os alunos seriam capazes de resolver a questão sozinhos, por isso, afastou-se. No entanto, deixou no ar a pergunta: "o que é que eu poderei dizer mais acerca destas figuras?". Seguiu-se um período de isolamento de Tomás das actividades do grupo avançando na construção das figuras e de Daniel que, numa atitude mais individualista, continuava a trabalhar no problema, acabando por encontrar uma nova sequência numérica.

Estas atitudes mais individualistas foram ultrapassadas primeiro por Daniel, que depois de gerir o seu conflito, resolveu voltar à actividade em grupo, regulando a participação dos mais apressados. Pelos comentários de Daniel percebe-se que este gosta do trabalho colaborativo autêntico, mas que, por vezes, não o consegue fomentar:

Daniel- ...Este aqui tem 30 paus!! [tinha contado o total de fósforos da 4.ª figura A]
Bela- Puxa!
Daniel- Ó Tomás espera.
Tomás- Porquê?
Daniel- Então, estávamos aqui, tu já estavas aqui, depois estávamos aqui e tu já estavas aqui, não esperas Tomás!?

Também Sara percebeu que Daniel estava disposto a trabalhar colaborativamente e, ao ler os registos sobre a nova sequência encontrada pelo colega, não critica o resultado encontrado por ele, apenas se admira que não corresponda às suas palavras:

Sara- 3 mais 6... 9 mais 9... 19 [deveria ser 18], disseste que era trinta!
Daniel- Da última....

Quando a professora se aproximou de novo do grupo, Tomás continuou egocentricamente a trabalhar e a professora incentivou-o a comunicar com os colegas de grupo, afirmando: "Tomás, parece-me que não tens o teu trabalho igual ao do grupo! Falta-te descobrir a terceira sequência. Não fizeste trabalho de grupo?"

Com a intenção de perceber como tinham resolvido o problema e como tinham pensado durante esse processo, a professora dirigiu-se aos alunos inquirindo-os:

Prof.ª- Então, o que é que já descobriram?
Daniel- Descobrimos os paus de cada uma.
Prof.ª- Os paus de cada uma como? Já tinham o número de paus que o perímetro mede, não era?
Daniel- Sim.
Prof.ª- E agora, se eu for ler o que escreveram, leio " 1.ª figura, 3 paus; 2.ª 9 paus 3.ª 19 paus, paus...como? Parece-me que é melhor confirmarem e depois explicarem que número de paus é esse!

Sara- No total.

Durante esta parte da actividade, Ana solicitou várias vezes aos alunos que verificassem os passos intermédios da resolução do problema, por ter detectado alguns enganos de contagem. Este pedido foi feito através de questões como "verificaram se o que o Daniel disse corresponde ao número total de fósforos de cada figura?" ou como "parece-me que é melhor confirmarem".

Curioso foi verificar que Daniel teve o cuidado de verbalizar o seu pensamento com a intenção de ajudar os colegas a corrigirem os seus registos:

> Daniel (em voz alta)- Agora não aumenta 10, mas 9, e aqui [da 3.ª para a 4.ª figura] 12.

Quando passaram às outras sequências de figuras, os alunos do grupo não precisaram de material para as construírem, isto é, desenharam a 4.ª figura de cada uma das sequências a partir da última desenhada na folha do enunciado. Em seguida, procederam rotineiramente na descrição das relações que encontravam entre as figuras e os valores de cada uma das sequências numéricas, sem descobrir que as duas últimas sequências de figuras não apresentavam as sequências numéricas pela ordem das duas primeiras. Apesar de terem sido chamados à atenção pela professora quando iniciaram essa parte da resolução, os alunos não foram críticos quanto à evolução dessas sequências e procederam como se elas estivessem exactamente pela ordem da primeira (ver Figura 15).

Tomás ainda tentou esclarecer-se a esse respeito com o colega de grupo que julgava ter boa competência matemática: Daniel, contudo ele induziu-o em erro:

> Tomás- [Daniel] tenho uma dúvida...esta parte [2.ª sequência numérica da sequência D] conta-se o perímetro ou não?
> Daniel- Conta.

Os alunos trabalhavam em silêncio. De vez em quando um ou outro fazia o ponto da situação ou reflectia sobre o que lhe estava a acontecer, dizendo por exemplo: " Esta [a 4.ª figura da sequência C] dá 28 paus e 19 de perímetro".

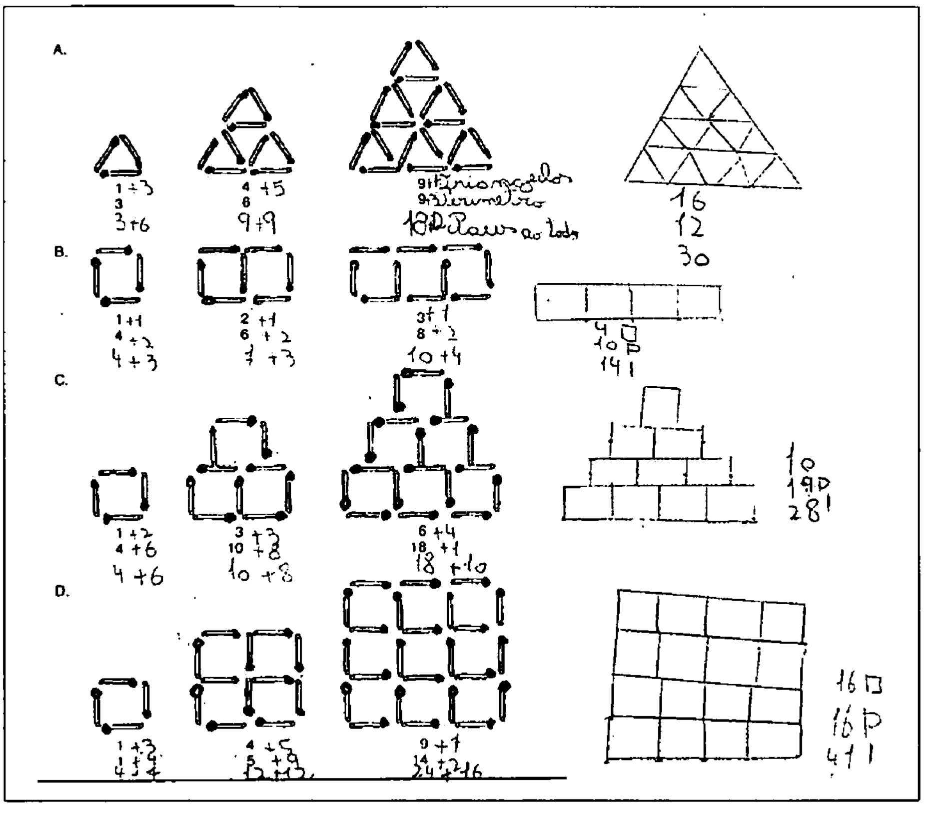


Figura 15 – Trabalho com fósforos desenvolvido por Daniel e seu grupo.

Tomás ainda tentou esclarecer-se a esse respeito com o colega de grupo que julgava ter boa competência matemática: Daniel, contudo ele induziu-o em erro:

> Tomás- [Daniel] tenho uma dúvida…esta parte [2.ª sequência numérica da sequência D] conta-se o perímetro ou não?
> Daniel- Conta.

Os alunos trabalhavam em silêncio. De vez em quando um ou outro fazia o ponto da situação ou reflectia sobre o que lhe estava a acontecer, dizendo por exemplo: “ Esta [a 4.ª figura da sequência C] dá 28 paus e 19 de perímetro”.

Ao contar de novo os fósforos da segunda sequência numérica da sequência C, Daniel encontrou algo estranho, que não conseguiu decifrar e que pensou ser a medida do perímetro das figuras geométricas, mas na verdade era o número total de fósforos utilizados na figura. Apesar disso, mostrou-se firme e não verificou o que se passava :

Daniel- Eu acho que isto aqui não está a condizer... porque olha [dirige-se a Bela, mas todos olham para ele], aqui [no enunciado, a 3.ª figura da sequência C] tem 18 e aqui na que fizémos, se forem contar tem 19. Escrevemos 19.

Quando pretendeu construir a última figura da sequência D, Bela solicitou, de novo, a ajuda da professora para lhe validar o raciocínio que estava a ser posto em causa pelo colega que ela considerava de competência matemática superior à sua. A professora procurou apoiá-la, percebendo que o resultado seria o mesmo:

Bela- Para desenhar a figura a seguir [4.ª da sequência D] é só acrescentar uma fila assim [na horizontal] e assim [na vertical], não é?
Prof.ª- Que achas?
Bela- Eu acho que sim porque fica com 4 – 4. Mas, o Daniel diz que não.
Prof.ª- Então vamos ouvir o Daniel, pode até acontecer que o Daniel esteja a dizer o mesmo por outras palavras!
Daniel- Eu acrescento aqui 4 e aqui 3 e fica um quadrado.

Como Bela se mostrava duvidosa, a professora incentivou os dois apoiando os seus pontos de vista, não validando pensamentos, deixando que os alunos validassem as suas próprias ideias, dizendo: "então, eu sugiro que cada um experimente como pensa , depois falamos das duas figuras..."

Os alunos continuavam sem usar o material. Olhavam para a figura anterior na folha do enunciado e procuravam desenhar de imediato no papel, mas nem sempre o conseguiam fazer. Daniel, por exemplo, fez dois registos. Sara que se encontrava atenta aos desempenhos dos dois colegas percebeu que Daniel e Bela falavam do mesmo:

Daniel- Está diferente do que eu disse.
Prof.ª- Vê bem.
Sara- Vê, ela fez o que tu disseste: tem 4 aqui e como sai um de fora, é só preciso pôr 3.

Durante a actividade verificámos que os alunos revelaram maior autonomia e individualidade que poderá dever-se ao facto de terem abandonado o material e procedido ao registo individual dos resultados.

No final desta segunda parte, Tomás mostrava-se visivelmente satisfeito pela forma como lhe tinham corrido os trabalhos e revelou isso no comentário que fez ao problema: "eu gostei e tive dúvidas ao princípio, mas acabei por perceber tudo". Assim se percebia que, pela primeira vez, Tomás tivesse tomado a iniciativa de se oferecer para iniciar a apresentação à turma dos resultados encontrados, contudo isso não foi possível já que a professora tinha decidido ser ela a gerir a discussão da questão das regularidades nas sequências numéricas, em grande grupo.

Ana considerava que o estabelecimento de relações entre sequências numéricas e sequências de figuras era um trabalho de alguma complexidade, para os alunos da turma. Esse trabalho exigia da sua parte maior apoio a cada grupo, mas que devido ao adiantado da hora não era possível dar. Por isso, optou por deixar que as crianças continuassem a pensar que se cumpria a mesma ordem em todas as sequências de figuras: perímetro, número de unidades de área (a que os alunos chamaram simplesmente triângulos=T ou quadrados=Q) e n.º total de fósforos (a que os alunos chamaram fósforos=F ou paus=|).

3.ª parte da actividade: exploração de regularidades em sequências numéricas

Nesta parte da actividade pedagógica Ana decidiu gerir a situação didáctica totalmente para sintetizar o que tinha sido descoberto em grupo e ainda, de um modo afirmativo, explicar procedimentos e ajudar através da sua interacção com as crianças, a construir o seu saber matemático.

Primeiro comunicou aos alunos o que iriam fazer nesta parte da aula. Depois, escreveu no quadro as sequências numéricas que diziam respeito às sequências de figuras A e C, como mostra o Quadro 4.2. E, ainda durante a explicação, Ana esclareceu os alunos acerca da necessidade de compreenderem o que se iria falar ali, não interessando a correcção dos números.

Quadro 4.2: *Sequências Numéricas Relacionadas com as Sequências de Figuras A e C Compiladas e Escritas pela Professora*

Triângulos-A	1	4	9	16
Perímetro-A	3	6	9	12
Fósforos-A	3	9	18	30
Quadrados-C	1	3	6	10
Perímetro-C	4	8	12	16
Fósforos-C	4	10	18	28

Seguidamente, a professora solicitou aos alunos que reparassem na sequência A e tentassem descobrir "de que forma é que se saltou do 1 para o 4, do 4 para o 9 e do 9 para o 16", ou seja, que tentassem descobrir a regularidade dessa sequência numérica. Os alunos foram expondo as suas ideias e a professora apoiava os seus pensamentos pedindo-lhes explicações, procurando saber o modo como pensavam resolver esta questão.

Nesta parte da aula observaram-se vários momentos de interacção entre a professora e os alunos, mas nunca estes colocaram qualquer questão uns aos outros; os alunos respondiam apenas às questões colocadas pela professora:

> Prof.ª- E de que forma é que se aumenta cada vez mais triângulos?
> Manuel- Começámos por fazer 3 triângulos e depois pus o 1.º
> Prof.ª- Como é que tu construías a 2.ª figura? Como é que fizeste?
> Manuel- Comecei a fazer 3 triângulos e depois juntei o que estava ao lado, o 1.º
> Prof.ª- Então, estás a dizer que fizeste 3 triângulos e juntaste o anterior que já estava lá! É isso?
> Manuel- Sim.

Percebia-se que a professora procurava promover a aprendizagem dos alunos tornando mais claras as afirmações por eles feitas quando sintetizava as ideias de cada um. E, à medida que se entusiasmava com as descobertas dos alunos, parecia que as crianças tinham sido contagiadas por esse entusiasmo e mostravam as suas descobertas sem inibições, como evidenciam os diálogos:

> Prof.ª- Já começámos a descobrir qualquer coisa: na 1.ª figura juntaram-se 3 e passámos a ter a segunda figura com 4. E depois? Mónica.
> Mónica- Do 4 para o nove fui buscar mais 5.
> Prof.ª- E agora?
> Vários alunos- Fomos buscar mais 7 ... depois mais 9.

Sem nunca perder o controle da situação, Ana pensou em voz alta permitindo aos alunos seguirem o seu raciocínio e descobrirem a regularidade existente, formulando assim uma nova conjectura que lhes permitisse depois generalizar. Para isso, apresentou aos alunos a sua ideia: "imaginem que eu agora dizia para construírem um triângulo ainda maior que este".

Alguns alunos verbalizaram as suas ideias e, sem tecer acerca delas quaisquer considerações, Ana disse apenas: "porque não estão todos de acordo, vamos olhar para aquela sequência e descobrir ali o truque. O truque está ali". O entusiasmo pela descoberta fazia sentir-se em muitos alunos. Ana deixava por isso que eles verbalizassem os seus pensamentos. Assim, pudemos observar que muitos deles acompanhavam o tipo de raciocínio indutivo que estava a ser efectuado. Este processo foi conseguido, como mostram os diálogos:

Flávio- Mais 3, mais 5, mais 7, aumenta de dois em dois.
Prof.ª- Então o triângulo que vem a seguir quanto é que vai aumentar? Mais...
Bernardo- 2
Prof.ª- O que é que o Flávio disse? [como quem não se lembra]
Manuel- Aumentava dois.
Prof.ª- Então quanto é que aumentou este 4.º?
Manuel- 7
Bernardo- 9, vai aumentar 9 [muito rapidamente].

Os alunos estavam em situação de saber dizer quantos triângulos ficavam desenhados no interior da 4.ª figura A.

Um aspecto importante e que deve ser salientado é que depois desta descoberta, e para verificar os passos do raciocínio, Ana foi fazendo simultaneamente um registo no quadro preto (ver Figura 16).

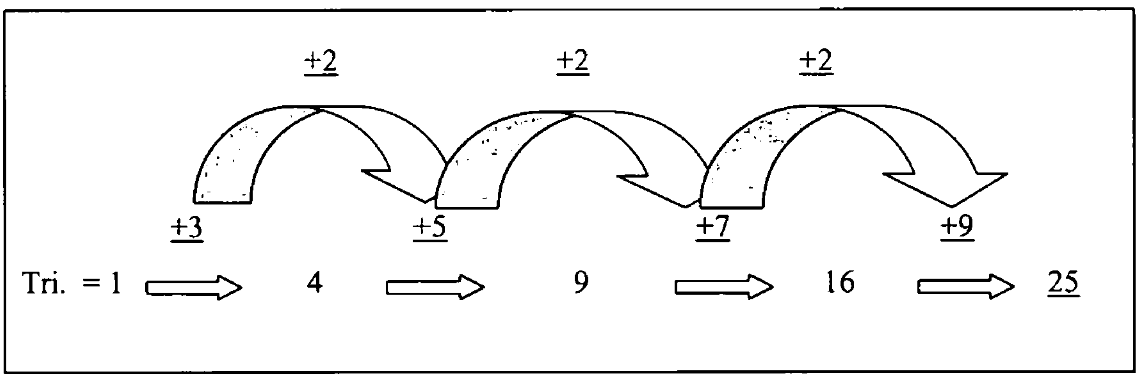


Figura 16 – Sequência numérica que traduz o número de triângulos dentro de cada figura da sequência de figuras A feita no quadro pela professora.

Ana passou então à sequência numérica relacionada com a sequência de figuras A, por traduzir o seu perímetro. Nesta parte da actividade notava-se que os alunos estavam mais despertos para novas descobertas. Mara, uma aluna na segunda vez no 4.º ano surpreendeu-nos positivamente em relação ao seu desempenho nestas actividades. A professora sempre atenta, reforçava a sua participação apelando à necessidade de respeitarmos as intervenções dos outros:

Prof.ª- Agora vamos tentar descobrir na do perímetro. Como é que se dá o salto do 3 par o seis, do 6 para o 9, do 9 para o 12...
Mara- É a tábua do 3
Prof.ª- Será? Então como escrevo?
Mara- É como a de cima , só que a outra é de 2 em 2 e esta é de 3 em 3.

Mara eleborava uma conjectura e precisava de demonstrar que era válida. Poderia tê-lo feito com o material que tinha à disposição, mas Ana optou por uma demonstração verbal. Isto é, serviu-se da Figura 17 que fez no quadro para mostrar o que se acabava de dizer.

Quando Ana perguntou quantos fósforos haveria à volta de uma quinta figura e a resposta foi "16", questionou a aluna a fim de saber o que a levava a dar aquela resposta. Isso fez com que a aluna reflectisse e corrigisse os seus próprios cálculos:

Prof.ª- Diz-nos como pensaste.
Mara- Pensei que é a tábua do 3, como o último é 12, 12 mais 3 é...15, afinal é 15.
Prof.ª- 15 quê?
Mara- 15 fósforos a toda a volta!

$$\hat{P} = 3 \xRightarrow{\underline{+3}} 6 \xRightarrow{\underline{+3}} 9 \xRightarrow{\underline{+3}} 12 \xRightarrow{\underline{+3}} \underline{15}$$

Figura 17 – Sequência numérica que traduz o perímetro da sequência de figuras A feita no quadro pela professora.

Nesse momento surgiu-me uma dúvida: não teria sido importante fazer uma tentativa de obtenção da expressão que traduz a relação de perímetro entre as duas sequências? Ou seja, será que os alunos teriam conseguido, com apoio, a formulação de uma lei geral que nos pudesse conduzir à generalização da regularidade da sequência numérica em causa, permitindo uma demonstração mais formalizada que garantisse a validade da conjectura?

Ana passou para a sequência seguinte, a do número total de fósforos de cada figura, parecendo valorizar sobretudo a descoberta e a exploração de regularidades. Ao mesmo tempo ia alargando a ideia de sequência ao perguntar a uma aluna o que é que ela tinha encontrado "que pode ajudar a construir figuras cada vez maiores".

Assim, para dar a ideia aos alunos de que essa sequência se podia prolongar infinitamente, a professora disse que "podíamos chegar a fazer uma figura do tamanho da sala, ou maior, se tivéssemos o espaço todo disponível!". As respostas foram também rápidas como evidenciam os diálogos:

> Daniel- Mais 6
> Prof.ª- Do 3 para o 9 há 6 diz o Daniel; há alguma dúvida?
> Vários alunos- Não.
> Daniel- Mais 9
> Vários alunos- Mais 12

Mara continuava a verbalizar as suas ideias e a professora, percebendo haver dificuldades na compreensão do processo, procurou conhecer melhor o seu pensamento questionando-a e solicitando-lhe justificações no sentido de promover a sua aprendizagem:

> Mara- Eu fazia 30 com mais 3 porque cada triângulo tem 3 lados, ficava 33.
> Prof.ª- Agora diz-me onde é que tu viste aqui esse 3?
> Mara- 6+3 é nove...
> Prof.ª- Espera espera... De que forma é que aumentou?
> Mara- Aumenta sempre 3

Se as ideias do aluno não eram claras de modo que a maioria dos outros as compreendesse, a professora procurava sintetizá-las de um modo afirmativo, como se percebe pelos diálogos, fazendo o registo no quadro (ver Figura 18). Verificou-se ainda que, quando a professora lançava uma questão, muitos respondiam mesmo quando não eram solicitados, cheios de entusiasmo:

> Prof.ª- Então vamos lá ver: do 3 para o nove, aumenta 3, do 9 para o 12, aumenta 3, então quanto é que vai aumentar agora aqui [apontando para a sequência no quadro]?
> Vários alunos- 15.

Aproveitando o entusiasmo dos alunos, Ana foi incentivando a evolução da sequência. Neste caso, demonstrar a validade das conjecturas, passava também pela utilização dos materiais, porém, percebia-se que o tempo pressionava Ana.

Seguidamente, procederam à descoberta da regularidade encontrada na sequência numérica identificada como quadrados, na sequência de figuras C.

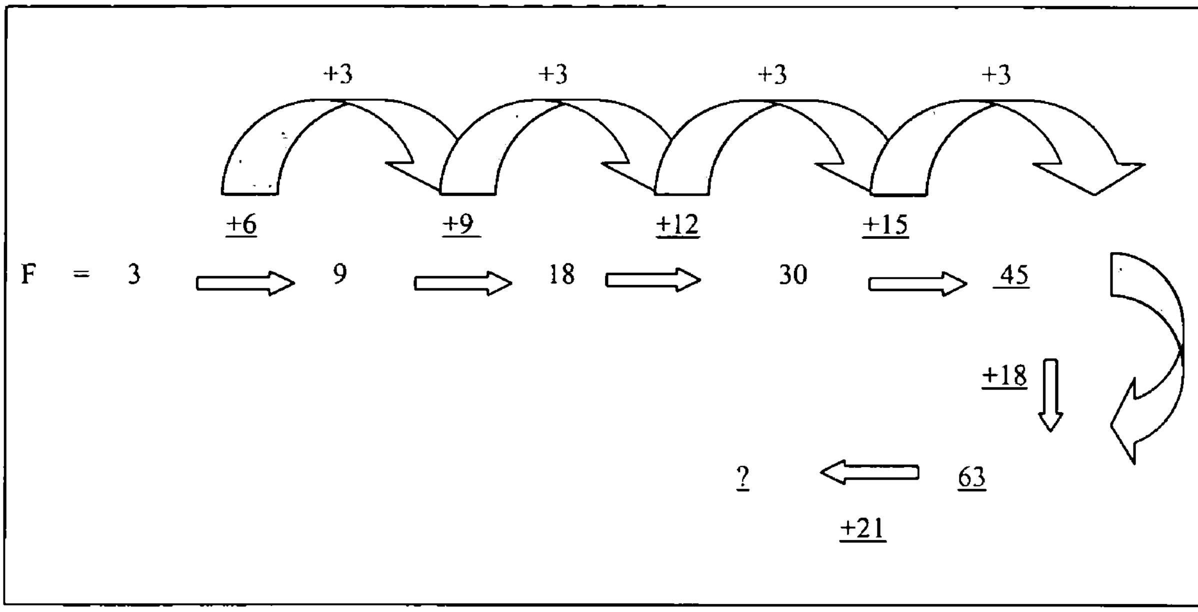


Figura 18 – Sequência numérica que traduz o número de fósforos de cada figura A feita no quadro pela professora.

Nesta parte da actividade pedagógica Ana procurou, na maior parte do tempo, coordenar e gerir as intervenções dos alunos, motivando-os sempre para a descoberta, de modo que fossem explicitando as suas ideias, ultrapassando dificuldades e acompanhando o pensamento dos outros:

> Prof.ª- Vamos descobrir qual é o tal salto que aparece aqui do 1 para o 3 do 3 para o 6 e do 6 para o 10? Jorge.
> Jorge- Mais 2; mais 3; mais 4;
> Prof.ª- Então o próximo o que é que ia ter? Dália.
> Dália- Mais 5.
> Prof.ª- E dava ...
> Dália- 15

A professora tentava que os alunos fizessem previsões dos resultados da evolução das sequências numéricas e que verbalizassem as suas ideias acerca das regularidades encontradas nessas sequências à medida que fazia o registo no quadro (ver Figura 19). Esta tinha sido a maior dificuldade dos grupos durante a 2.ª parte da actividade pedagógica, contudo ela estava a ser ultrapassada com a contribuição de todos:

> Flávio- É de 1 em 1. Aumentava sempre 1 aos quadrados que se juntavam.
> Prof.ª- E se continuassemos?
> Vários alunos- Mais 6.

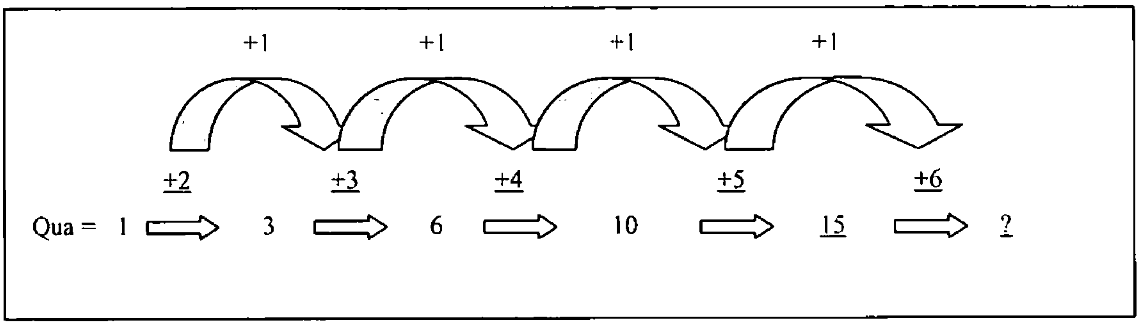


Figura 19 – Sequência numérica que traduz o número de quadrados dentro de cada figura da sequência de figuras C feita no quadro pela professora.

A aula aproximava-se do fim e Ana apressava-se a pedir "vamos agora ao número de fósforos ... quem descobre o padrão da sequência?". Os alunos despachavam-se também a responder e, ao mesmo tempo, a professora completava o seu registo no quadro (ver Figura 20). Mostravam-se tão confiantes e entusiasmados que a sua vontade era prolongar o mais possível a sequência numérica. O prazer da descoberta fascinava as crianças:

> Vários alunos- Mais 6; mais 8; mais 10
> Prof.ª- Como é que aumenta?
> Vários alunos- É de dois em dois
> Prof.ª- Agora aqui teria de pôr ...
> Vários alunos- Mais 12
> Prof.ª- E dava um quadrado com...
> Vários alunos- 40

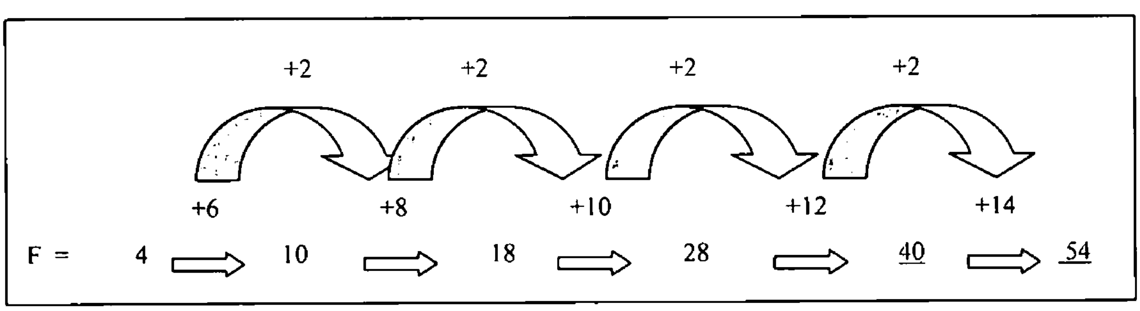


Figura 20 – Sequência numérica que traduz o número de fósforos de cada figura C feita no quadro pela professora.

Em resposta à proposta "agora o padrão do perímetro", as crianças verbalizavam as suas ideias ao mesmo tempo que a professora completava no quadro o seu registo (ver Figura 21). Já só bastava apontar o que queria e dizer: "e se quiséssemos continuar com uma figura maior?" e as crianças verbalizavam o número.

$$P = 4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+4} 12 \xrightarrow{+4} 16 \xrightarrow{+4} \underline{20} \xrightarrow{+4} \underline{24}$$

Figura 21 – Sequência numérica que traduz o perímetro da sequência de figuras C feita no quadro pela professora.

No final da actividade, um dos alunos formulou uma conjectura que não pôde ser verificada, ficando assim o gosto de descobrir uma relação interessante, embora não demonstrável no momento:

> Júlio- Assim dava para fazer uma figura com 1000!
> Prof.ª- Dava para fazer uma com 1000 e com mais se os tivéssemos e quisésssemos!

Foi também preocupação da professora explicar o conceito *perímetro* associado a esta actividade, uma vez que os fósforos podem constituir unidades de comprimento facilmente utilizáveis: unidade de comprimento-um fósforo. Assim, gerindo totalmente a situação e em jeito de conclusão, a professora procurou verificar os conhecimentos dos alunos validando de imediato as suas respostas. Isto é, sempre que o aluno não respondia correctamente a professora voltava a formular a questão e propunha-a a outro aluno:

> Prof.ª- Qual foi a unidade que utilizámos para medir o perímetro destes quadrados e triângulos? Manuel.
> Manuel- Foi o perímetro.
> Prof.ª- Jacira, qual foi a unidade que utilizaste para medir o perímetro destas figuras, foram os dedos?!
> Jacira- Os fósforos.
> Prof.ª- Foram os fósforos! Isto [pegando num] foi a unidade utilizada.

Dos fósforos passaram aos centímetros, e pelo que pudemos observar, as crianças confundiam instrumento de medida com unidade de medida, mas essa clarificação teria de ficar para depois, era o que evidenciavam as palavras de Ana nos diálogos que mantinha com as crianças:

> Prof.ª- Qual foi a unidade que utilizaram ontem para marcar a folha?
> Mónica- A régua!
> Prof.ª- Os centímetros. A régua é um instrumento, meus queridos! E se eu utilizar o esquadro, que unidade utilizo? Por exemplo, se eu quiser medir o comprimento deste fio com o esquadro, que unidade utilizo?
> Manuel- O esquadro.
> Prof.ª- Não filho, o esquadro é um instrumento! São os centímetros!

Ana não esqueceu o reforço positivo a dar aos alunos quando a resposta era por ela considerada válida ou certa:

> Prof.ª- E assim, qual é a unidade que estou a utilizar?
> Daniel- Os centímetros.
> Prof.ª- Muito bem.

Por se ter prolongado mais do que o previsto, a aula terminou com a professora a permitir que os alunos fossem para o intervalo.

Comentário global

Dos problemas resolvidos até agora, este foi o que fez Ana reflectir mais, pois tinha-me confessado que achava a tarefa difícil para estes alunos. Talvez por isso tivesse estado tão calma e falasse tão pausadamente, durante toda a 1.ª parte da aula; na 2.ª parte se tivesse afastado do grupo em observação por longos períodos; e, depois de alguns alunos a terem surpreendido com descobertas que praticamente realizaram de forma autónoma, se tivesse entusiasmado na 3.ª parte da aula incentivando os alunos à descoberta de regularidades questionando-os, enfim, promovendo a sua aprendizagem.

A resolução desta tarefa possibilitou aos alunos trabalharem importantes conteúdos matemáticos como: explorar, visualizar, desenhar e comparar figuras bidimensionais em sequências crescentes; reconhecer lados numa figura bidimensional; desenvolver a visualização e o raciocínio espacial; explicitar oralmente e representar por escrito os passos seguidos ao efectuar os cálculos das sequências numéricas; descobrir e explorar regularidades numéricas; escrever números em sequências crescentes; calcular o perímetro de uma figura bidimensional com unidades de medida não convencionais; distinguir triângulos de quadrados e aplicar os múltiplos de um número natural associando-os às tabuadas da múltiplicação. Durante a sua actividade, também foi possível verificar que os alunos tentavam, sozinhos, reflectir sobre os passos dados e sobre o número obtido na sequência numérica, fazendo-o, contudo, ainda de uma forma pouco experiente já que de seguida não verificavam esse resultado.

Na fase da compreensão do problema Ana decidiu expor oralmente a tarefa, sem dar a ler o enunciado aos alunos, por considerar o texto demasiado complexo para eles. Assim, do modo como foi feito, a questão da construção da última figura de cada sequência foi bem explanada, no entanto a relação das sequências numéricas com as figuras a elas associadas parece não ter ficado muito explícita e, talvez por isso, tivessem ocorrido dois obstáculos à resolução deste problema. O primeiro foi a dificuldade na compreensão do problema, pois os alunos não conheciam o significado da expressão *sequências numéricas* nem o que deviam fazer com elas, enquanto trabalhavam em grupo. O segundo foi a dificuldade na verbalização de ideias acerca das regularidades encontradas nas sequências e no emprego do vocabulário indicado para a partilha de significados.

Em compensação na 3.ª parte da actividade pedagógica, a professora explorou com os alunos as regularidades numéricas encontradas tanto nas sequências de números apresentadas, como na criada por eles e que foi sempre a mesma: o número total de fósforos. O modo como os alunos participaram em trabalho colectivo, leva-me a colocar a seguinte questão: se tivesse sido feita a tentativa de obtenção da expressão que traduzisse a relação de perímetro e da área entre as duas sequências da sequência A, os alunos teriam conseguido descobri-la? Ou seja, conseguir-se-ia chegar à formulação de uma lei geral que conduzisse à generalização da regularidade da sequência numérica em causa, permitindo uma demonstração mais formalizada que garantisse a validade da conjectura, com estes alunos?

Nesta sessão, Ana confessou-me que estava bastante surpreendida com alguns alunos. Chegou a chamar-me para observar a situação de duas alunas que não conseguiam visualizar a mesma figura, do mesmo modo, para a poderem construir, já que uma pretendia começar por baixo e outra por cima. Estas alunas interagiram de modo concordante, acabando por cada uma construir a sua figura. Ambas revelaram uma enorme satisfação por terem conseguido concluir com sucesso a sua construção verificando que qualquer uma das duas tinha razão.

Outra situação que a deixou admirada foi a capacidade espacial que uma aluna revelava nesta actividade e que quanto a ela se devia ao facto da mesma ter realizado muitas actividades com fósforos no ano anterior. Dizia Ana: "...agora destaca-se do grupo, vê tudo mais depressa que os outros! Descobriu o perímetro!".

Outra exclamação de Ana, a propósito de se sentir perplexa com os seus alunos foi: "isto saíu-me melhor que a encomenda".

Há ainda a salientar o facto de não se terem observado interacções entre Sara e Tomás. Mas em contrapartida, Tomás foi respondendo mais vezes às questões colocadas pela professora do que o habitual. Isso, parece tê-lo deixado tão satisfeito que acabou por se voluntariar para comunicar à turma os resultados encontrados pelo grupo, pela primeira vez.

A oralidade continuou a ocupar um lugar de destaque no desenvolvimento desta actividade, notando-se contudo pouco uso de vocabulário próprio na descrição das figuras.

Mais uma vez se verificou a falta de tempo no final da aula para a verificação atempada dos resultados e soluções obtidas.

5. *Higiene Dentária*

1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma

Após uma conversa calma com os alunos acerca do início do seu dia de aulas e dos seus hábitos de higiene dentária, estimulando assim a sua curiosidade sobre a tarefa que iria propor, a professora leu a proposta, pausadamente (ver Quadro 3.2).

Depois, foi a vez dos alunos lerem em silêncio e fazerem a interpretação da mesma através de questões colocadas pela professora.

As crianças revelaram algumas dificuldades na interpretação do texto. Por isso, à medida que elas iam respondendo, a professora repetia o que diziam para se tornar mais perceptível, aproveitando as suas respostas para as focalizar nos dados da situação apresentada, direccionando as questões, primeiro para todos e depois para um só aluno.

O diálogo que a professora manteve com os alunos mostra o seu esforço para os familiarizar com a situação proposta, levando-os a evocar os pontos relevantes dessa situação ou a clarificar pormenores que poderiam, mais tarde, vir a ter um papel importante:

> Prof.ª- [Olha o texto e pensa alto] Eu não estou a perceber isto!? Cada tubo custa dois euros e meio, bem até aqui eu percebo. Dá para fazer uma tira de 135 cm!? Ajudem-me que eu não estou a perceber o que é que se diz aqui!

Então, Sandra, espontaneamente, verbalizou o seu pensamento mostrando alguma confusão na interpretação do que estava escrito, tentando a professora procurado saber como é que a aluna tinha chegado àquela ideia:

> Sandra- As duas pastas que custaram dois euros e cinquenta cêntimos, se juntarem isso tudo tem 135.
> Prof.ª- Há duas?! Eu não sabia que eram duas pastas! Onde é que tu descobriste isso?
> Sandra- [lendo] " a mãe do Miguel e da Clara compra uma pasta especial só para os dois filhos"...

A professora mostrou-se surpreendida com o pensamento de Sandra e continuou a interagir com ela, mas a aluna não verbalizou o seu pensamento:

> Prof.ª- Eu não tinha pensado assim! Tu achas que ela compra duas, porque a seguir vem "cada tubo custa", é por isso?
> Sandra- ... [Não responde]

Perante o silêncio da aluna, a professora apelou a outras áreas curriculares para ajudar na compreensão desta questão, relembrando o que tinha sido aprendido. Como não obteve resposta, Ana continuou a sua explicação, terminando com uma pergunta "todos acham que é uma?" a toda a turma, a que os alunos pouco reagiram. Só Júlio colocou o dedo no ar e respondeu: "é a pasta que tem lá dentro". Ana voltou a pedir esclarecimentos aos alunos. Então, Daniel, sem ser solicitado, verbalizou as suas ideias à turma:

> Daniel- Professora, é que se nós fizermos assim uma tira com a pasta toda [faz o gesto em cima da mesa], consegue-se fazer 135 cm.
> Prof.ª- Ah! Se eu espremer o tubo da pasta, aquilo vai saindo, saindo, saindo e se nós medirmos dá...
> Vários alunos-135 cm [interrompendo a professora].

Ana mostrou-se satisfeita com a interacção estabelecida com os alunos dizendo-me "agora fez-se luz nestas cabecinhas". Apesar do significado da expressão parecer estar partilhado, a professora fez questão de a dramatizar para que os alunos pudessem esclarecer as dúvidas que ainda tivessem. Para isso, valeu-se de duas fitas métricas de papel. Cortou uma pelos 35 centímetros e uniu as duas com fita-cola, enrolando-as em forma de tubo. Chamou depois um aluno para a ajudar a retirar as fitas aos poucos e esticando-as sintetizou: "então, cá está: 135 centímetros de pasta dentífrica que saíram de lá!"

De seguida, e com os alunos atentos, Ana aflorou um plano de formulação de problemas a partir da ideia de uma aluna, mas que não parecia intencional, pois passou imediatamente à leitura do restante enunciado da tarefa e à discussão da palavra *criar* que poderia levantar dúvidas:

> Mara- Se fizesse isso todos os dias, a minha mãe tinha de comprar uma pasta por dia.
> Prof.ª- E quanto tinha de gastar a tua mãe?
> Mara- 2 euros e meio.
> Prof.ª- Se custasse o preço desta. Vê lá a despesa que era! Agora pensem lá no que vem a seguir: "leiam com atenção o texto e criem...", o que é criar ?

Sintetizando a proposta, Ana solicitou a todos que trabalhassem em grupo.

2.ª parte da actividade: formulação e resolução de problemas pelo grupo em foco

No início foi possível observar os alunos a brincar com as palavras e a imaginar situações, até que Sara resolveu focalizar os colegas para a actividade dizendo: "vá, vá que é que vamos fazer?". Foi então que Daniel, como tem sido hábito, decidiu liderar o grupo e ler o texto em voz alta.

Sara mostrou-se decidida a contribuir para a formulação de um problema, mas Daniel interrompeu-a para sugerir uma série de questões e mostrar a sua autoconfiança. A rapidez da sua intervenção fez crer que não era possível criar outros problemas, para além de dar a entender que lhe cabia a ele fazê-lo primeiro que qualquer um dos outros elementos. Sara, aproveitando as sugestões do colega, mostrou-se capaz de ceder, apesar de preferir os problemas que estão bem mais perto da sua realidade, ou possivelmente, como referiu na entrevista, para não ter de enfrentar "as contas... por não saber bem a tabuada..." Mas, ao contrário, Tomás parecia preferir lidar com números grandes para tornar o problema mais difícil e interessante do seu ponto de vista:

Sara- Então podíamos fazer assim...
Daniel- Quanta pasta gastam por semana, por mês, por ano...
Sara- Não por ano não, isso é muito! Por semana.
Bela- Por semana? Por ano que é mais giro.
Sara- Não, por mês, por mês...
Tomás- Não. Por 69 anos.

Para chegarem a um acordo, Daniel resolveu fazer votação. Contra a vontade de Tomás, ficou decidido por maioria que iriam saber quanta pasta gastariam por mês. Mas, Tomás achou o problema demasiado fácil e pediu "por ano...". Daniel estimou imediatamente esse valor em duas pastas por ano, pretendendo mostrar a Tomás que seria muito mais interessante calcular o valor mensal, talvez por pensar que esse valor não correspondia a uma quantidade exacta de tubos. Enquanto Bela criticava a estimação numérica verbalizada por Daniel, Sara fazia nova estimação apoiando-se na sua vivência. Apesar da surpresa de Daniel a estimação de 5 pastas por ano ficaria depois registada, no final da resolução em grupo, como resposta a esse problema:

Daniel- Por ano temos de fazer duas pastas, né? Mas já fazemos por ano, agora vamos fazer por mês.
Bela- Não, porque tu não gastas duas pastas num ano, gastas muito mais!
Sara- Eu gasto para aí 5 pastas.
Daniel- 5 pastas num ano?!

Para Tomás apenas pareciam interessar as operações aritméticas. Por isso, sozinho, estabeleceu um plano que pretendeu partilhar com os outros elementos do grupo, mas só Daniel lhe respondeu, apesar de não mostrar interesse por esse plano:

Tomás- Já sei a conta!
Daniel- Já sabes qual é o resultado?
Tomás- Não ainda não sei.
Daniel- Já sabes a conta. Toda a gente já sabe a conta!

Mesmo assim, Tomás verbalizou o seu plano. Mas, a pouca tolerância de Sara ao discurso de Tomás, podiam vir a comprometer o trabalho colaborativo do grupo, como aconteceu na resolução da tarefa *Na Pizaria*. Também nesta aula se percebia que as ideias de Tomás não eram levadas em consideração:

Tomás- Eu acho que tínhamos de somar os 3 com os dois e...
Sara- Os 3 com os 2, lá estás tu com essas coisas...3 com os 2!!

Daniel continuou a elaborar o seu plano e, embora tivesse pedido a opinião a cada um acerca do mês a problematizar, resolveu alvitrar o mês de Abril que nenhum dos quatro tinha referido. Tomás, participativo, mostrou-se a favor do mês do seu aniversário, sugerindo que resolvessem o problema individualmente, aliás, muito do seu gosto, como referiu na entrevista. Então, Daniel assumiu a liderança, negando a sugestão de Tomás e fazendo nova votação, parecendo estar confiante de que obteria a maioria:

Daniel- Fazemos em Abril
Tomás- Eu faço em Janeiro... Cada um faz na sua data.
Sara- Então está bem Tomás, fazes como no outro dia.
Daniel- Não. Quem quer em Abril?

Sara foi dizendo que não, mas pondo o dedo no ar talvez para satisfazer a vontade de Daniel. Tomás, em contrapartida, sugeriu o mês de Outubro. Então, Daniel argumentou junto dele que tinha escolhido o mês de Abril por ser aquele em que nenhum dos quatro festejava o aniversário e, não esperando pela concordância do colega, iniciou a verbalização do seu raciocínio:

Daniel- Bem... 30 dias . Abril tem 30 dias. Agora 1cm por 3 vezes...
Tomás [interrompendo]- Não podes meter 30 dias...
Daniel- Espera aí. São 5 vezes ao dia...5 cm que gastam por dia.

Tomás continuou a revelar o seu gosto por problemas de cálculos numéricos mais complexos, ou com números grandes. Mas não resistiu a efectuar os cálculos que Daniel propôs na verbalização do seu raciocínio e, perante a desconfiança do colega, verbalizou o procedimento:

Tomás- Não, assim é demasiado fácil! Dá 150.
Daniel- Centímetros? Por mês?
Tomás- [confirma com a cabeça]
Daniel- Dá 150?! ...
Tomás- Vê, 5 vezes 30...
Daniel- Dá 150.

"É melhor não explicares essas coisas que eu nunca percebo nada" foram as palavras de Bela ao ouvir Tomás verbalizar o procedimento. Percebia-se também uma certa falta de confiança em si mesma, mas, apesar disso, lembrou os colegas que ainda lhes faltava escrever "o problema". Daniel acabou por concordar que essa era uma resolução demasiado fácil para a sua competência, no entanto, não ficou muito satisfeito por conceder esse prémio a Tomás, ironizando, um e outro, quando interagiam. Parecia que ambos rivalizavam na competência prática da resolução de problemas.

Daniel propôs nova votação para decidirem que problema formular. Porém, a tendência era para que não houvesse novamente consenso no grupo. E, enquanto Tomás sugeriu "quanta pasta gastam por ano?", Sara preferia "quanta pasta gastam por mês?", partindo do princípio que tanto Bela como Daniel estavam do seu lado. Bela lembrou-os que era esperado que trabalhassem colaborativamente.

Percebia-se claramente que o grupo se encontrava dividido. De um lado apenas um elemento, na maioria das ocasiões: Tomás e, de outro, Bela, Sara e Daniel. Porém, enquanto Tomás criticava os problemas criados pelos colegas por serem demasiado fáceis para a sua competência matemática, os outros três elementos dão a entender uma certa ausência de espírito crítico e de avaliação dos resultados:

> Daniel- Imagina, se num mês gasta duas pastas...
> Daniel e Bela [em simultâneo] - ... imagina lá num ano!
> Tomás- Está bem, uma beca.
> Bela- Já estás a fazer de propósito, Tomás!
> Sara- Vê-se logo...

Era mais do que evidente que Tomás não era bem visto pelos restantes elementos. Teria sido pela forma como interagiu ou verbalizou as suas ideias, ou pelas ideias diferentes que apresentou, não concordando de imediato com Daniel, o líder do grupo?

Contudo, Daniel continuou disposto a resolver a sua proposta inicial: "quanta pasta gastam por semana, por mês, por ano..." e que pretendia separar em três momentos. Mas percebia-se que a sua dificuldade era formular a questão:

> Daniel - Tu estás a dizer isso, mas tu não sabes como é que é o problema!
> Tomás- Então, porque é que não decidem vocês?
> Bela, Sara e Daniel [em simultâneo] - Está bem, nós decidimos.

Notou-se que Sara e Bela ficaram incondicionalmente do lado de Daniel. Concordaram sempre com as suas decisões e não fizeram esforço nenhum para entender as verbalizações de Tomás acabando, contudo, por terem a mesma opinião que ele:

> Daniel [para Tomás] - Olha, se não queres fazer está bem!... Um problema...um problema...Ah, já sei, já sei, já sei... Quantas pastas por ano a mãe tem de comprar? [pensa alto].
> Sara- Ui, também não é mau. Só que isso parece o mesmo do primeiro.
> Bela- Do primeiro e é muito fácil!

Apesar de Tomás se encontrar sozinho nesta actividade, foi respondendo às questões formuladas por Daniel, mostrando-lhe que eram demasiado fáceis de resolver. Daniel, embora não explicitamente, concordava com Tomás servindo-se das suas ideias. Tomás não o verbalizou, mas pela forma descontraída e rápida como respondia, aquelas questões eram meros exercícios para si:

> Daniel- Agora é por mês. Quantas pastas de denteees...agora está-me a falhar a palavra...
> Tomás- Compra duas e não gastam toda, pelos meus cálculos.
> Sara para Tomás- Que tipo de problema é esse? Podes-me explicar?
> Daniel- Ele está a dizer que gastávamos, não comprávamos.
> Sara- Hamm.

Por momentos Daniel estabeleceu um tipo de interacção simétrica em que procurou convencer Tomás das suas ideias, reconhecendo-lhe algum valor. Sempre que Daniel era compreensivo com Tomás, Bela e Sara também o eram, ou pelo menos não eram antipáticas para com ele:

> Daniel- Ah, espera aí, espera aí, espera aí. Pode ser assim: quantos centímetros de pasta os meninos gastam por mês?
> Sara- Sim, também pode ser...então vá.
> Tomás- Em Abril ou quê?
> Daniel- Não, depois decidimos isso, está bem? Com calma ó Tomás. Nós ainda estamos aqui... nós temos 10 coisas para fazer... nós ainda estamos na 2.ª, tu já vais na 10.ª! Tem calma Tomás!

Daniel sentia-se o líder do grupo e, por isso, via-se na obrigação de orientar os colegas, ditando-lhes as questões, procedendo a votações ou tomando decisões.

Bela e Sara pareciam reconhecer-lhe alguma autoridade ao aceitarem as suas decisões, mas Tomás, embora acompanhasse e registasse o que o colega decidia, insistia para que as suas ideias fossem aceites.

Procederam novamente à votação do mês. Como cada um escolheu um mês diferente, Daniel tomou a decisão, com a qual as colegas haveriam estar de acordo:

> Daniel- A 1.ª letra do abecedário é A, não é? Então vai ser Abril.
> Bela- Yá.
> Sara- Yá, boa ideia! Fica assim: "...no mês de Abril" certo?

Parecia que a única forma que Tomás via para o aceitarem mais pacificamente no grupo era solicitando ajuda, pois de outro modo não se compreendia por que razão

Tomás queria saber quantos dias tinha Abril se ele próprio já tinha efectuado o cálculo momentos antes:

> Daniel- 5 centímetros gastam por dia...
> Tomás- Abril tem 31 dias ou 30? Não me lembro!
> Daniel- Então... 30 [responde sem olhar o colega]. Já sei quanto é que dá... meto ali a conta... depois ponho 150.
> Sara e Bela- Hamm...

Quando o problema ficou resolvido, Daniel registou os passos da resolução e verbalizou-os em voz alta para que os restantes elementos pudessem fazer os seus registos e acompanhar o seu raciocínio. Tomás ficou entusiasmado quando ouviu Sara dizer que também achava o problema muito fácil. Então, manifestou o desejo de contribuir para a formulação de outros problemas: "já sei vários problemas". No entanto, esta atitude de Tomás foi o suficiente para Sara e Bela iniciarem uma brincadeira de palavras menos simpáticas que o deixaram cabisbaixo até a professora se aproximar.

Notou-se sempre grande preocupação com o ambiente de trabalho no grupo, por parte de Ana. E, ao aperceber-se do conflito existente, aproximou-se para tentar restabelecer a comunicação entre os alunos, perguntado: "Então o que é que se passa com o Tomás? Porque é que ele não está a participar?"

Foi Bela quem primeiro se pronunciou, de uma forma pouco objectiva, sendo logo interrompida por Daniel que, pelas suas palavras, dava a entender que Tomás contrariava sempre as decisões que pretendiam tomar:

> Bela- Ele há bocado queria fazer...nós queríamos fazer num mês...
> Daniel- Ele queria fazer num ano; nós queríamos fazer por semana, ele queria fazer num dia.

O conflito gerado no início da actividade em grupo ainda não tinha sido ultrapassado totalmente. Ana, sabendo a razão, fazia questão que o grupo levasse a sugestão de Tomás em consideração, sem impôr nada, pretendendo, assim, passar a ideia de que um problema complicado e trabalhoso poderia ser um problema interessante. No entanto, Daniel parecia não gostar do interesse demonstrado pela professora por um problema desse tipo e, inesperadamente, alterou a questão que havia formulado, tentando assim complexificá-la:

Prof.ª- Ele queria fazer por 69 anos, não era?
Daniel, Bela e Sara- Sim
Prof.ª- Não é impossível!
Daniel- Eu sei que não é!
Prof.ª- Pode ser um bocadinho mais complicado, mas não é impossível!
Daniel- Agora vamos fazer em quantos meses?
Prof.ª- É mais trabalhoso...

A intervenção da professora serviu para animar Tomás que entretanto resolveu copiar o registo que os colegas tinham feito.

Entretanto, Bela e Daniel acordaram problematizar a situação por 11 meses, como sendo uma questão pouco vulgar. No entanto, ela ainda não satisfazia Tomás que a encarava como mais um exercício de aplicação de simples operações aritméticas:

Bela- E agora vamos fazer um problema com 11 meses.
Daniel- Ora bem e agora "Quanto será em 11 meses?"
Tomás- Primeiro temos de contar os dias todos e depois fazer a conta de vezes.

Sara pouco tinha contribuido para a resolução da tarefa, preocupando-se muito em copiar os registos que Daniel ia realizando. No entanto e sempre que tinha dúvidas, solicitava a Daniel que a esclarecesse:

Sara- O que é que é esse 5? O 30 já percebi.
Daniel- O 5 é quantos centímetros eles gastam por dia.

À medida que Daniel verbalizava e registava os seus pensamentos, estabelecendo um plano para o segundo problema criado, Tomás procurava interagir com o colega, argumentando as suas ideias, o que deu origem a nova votação. Pois, enquanto Daniel pretendia retirar um qualquer mês do ano, de forma a trabalhar com os restantes onze, Tomás via o período de onze meses como fazendo parte de um ano de Janeiro a Dezembro, só podendo, por isso, retirar-se o mês do início ou o mês do final do ano:

Daniel- Qual é o mês que fica de fora? Dezembro, pode ser Dezembro. Ou então, fica Fevereiro.
Tomás- Não, não Daniel, Fevereiro não pode ser. Tem de ser Janeiro ou Dezembro!
Daniel- Ou sai Fevereiro porque tem 28 ou 29 dias...
Tomás- Não é por isso, é porque está no meio.

Depois da votação feita em que decidiram retirar o mês de Dezembro, Tomás adiantou-se a Daniel e lembrou: "aqui temos de meter menos o mês que não entrou".

Mais uma vez, Daniel demonstrou não ter gostado da intervenção de Tomás, pois pensava ter competência para resolver o problema sem a sua ajuda. Então, decidiu executar o plano individualmente recorrendo a Bela e a Sara para saber quantos dias tinha esse mês. Mas Tomás não desistia de contribuir com a sua ideia: "vai ser ano bissexto ou não?", deixando o colega um pouco irritado: Porém, Daniel continuava a efectuar cálculos, mas desta vez usando dados errados: ele confundia o número de dias do ano comum com 135 (centímetros) e retirava-lhe 31 dias, obtendo 104.

Quando Ana se aproximou do grupo e percebeu que Daniel era o único a possuir um registo dos cálculos algorítmicos efectuados, questionou-o acerca desses resultados. Como a resposta não a satisfez, solicitou-lhe que explicitasse, por escrito, o seu pensamento para que clarificasse as suas ideias:

> Prof.ª- Onde foste buscar os 104?
> Daniel- 104 são os meses, os dias dos meses.
> Prof.ª- Que meses é que tu escolheste? Como é que eu sei quais são os meses que tu escolheste?
> Daniel- Todos menos o Dezembro.
> Prof.ª- Mas eu não percebo isso. Portanto, por baixo vais pôr quais são os meses que escolheste.

Sentindo que Tomás não estava animado, Ana pegou na sua mão e apelou ao grupo para "aproveitar os 69 anos do nosso amigo Tomás" apelando a todos os seus elementos para aceitarem as sugestões dadas por cada um. No entanto, segundo o ponto de vista de Bela e Sara, "Tomás é que não fez nada e o Daniel faz sempre tudo".

Na perspectiva de Ana havia "muita má vontade" destes três elementos para com Tomás e ela não percebia porquê.

É certo que Tomás não se explicava de forma clara e isso pode ter prejudicado a comunicação entre os elementos do grupo. Mas também é verdade que ele rapidamente estabelecia um plano de resolução que os colegas não aproveitavam muitas vezes. Desta vez terá havido má vontade, ruído na comunicação ou apenas um problema sem sentido para a maioria dos alunos?

Quando Ana voltou a observar os registos de Daniel, percebeu o engano e tentou questionar o grupo no sentido de completarem o trabalho; ao mesmo tempo, valorizou a intervenção de Tomás:

> Prof.ª- Se tirarmos 31 dias ao ano todo dá-vos 104 dias?
> Daniel- Foi o que me deu.
> Prof.ª- Então, quantos dias tem o ano?

Tomás- 365.
Prof.ª- Exacto! [Ana valorizava a intervenção de Tomás] Então se tirares o mês de Dezembro dá 104? O ano tem quantos dias?
Sara- 365.
Prof.ª- Tirem-lhe o mês de Dezembro.
Tomás- 334.

Daniel, Sara e Bela faziam silêncio enquanto corrigiam os resultados. Percebia-se que Daniel se sentia humilhado. E considerando Tomás o causador dos seus erros, aproveitou o afastamento da professora para se dirigir a ele com alguma agressividade:

Daniel- Já não vou fazer os 69 anos, que grande confusão! Fazes tu [Tomás], eu não vou fazer mais nada! Depois a professora diz "já acabou" e nós ainda não acabámos! Fazes tu sozinho.
Bela- E depois escrevemos não acabei porque o grupo...
Daniel- Não. Escreve-se: não acabei porque o Tomás armou-se em esperto e complicou tudo. Ele quer é que a professora diga "ai este menino é tão esperto!" ai o Tomás é tão esperto, resolveu um problema tão grande! Queres? Fazes.

Era evidente que Daniel não estava nada entusiasmado pelo problema formulado por Tomás. Então a professora, que conhecia os seus alunos e percebia que algo não estava bem, intervinha colocando apenas a questão "então agora já podem resolver a do Tomás?". Com isto pretendia fazer com que o grupo aceitasse as questões e ideias de Tomás e, para além de dar a entender o seu desejo de acabar com os conflitos surgidos no grupo, dava também a entender atribuir uma certa importância a este tipo de problemas de aplicação de algoritmos cujo resultado é um número grande:

Daniel- Professora, a gente já não vai ter tempo de fazer isso, quando tocar ainda não temos acabado o problema! [sem olhar a professora nos olhos].
Prof.ª- Não, não, não é nada disso! Vamos lá pôr a pergunta do Tomás. Tomás, como é que era a pergunta?
Tomás- Quanta pasta gastam em 69 anos?
Prof.ª- Vá. Escrevam. Deixem uma linha e escrevam. [a professora dita] Quanta pasta gastam em 69 anos?
Daniel- Isto aqui é mais velho que a minha mãe.

Daniel mostrava-se, neste momento, muito crítico em relação à questão formulada por Tomás. Não sentia interesse algum e não parecia nada empenhado. Então, pensámos: que sentido faria esse problema para Tomás? Seria apenas o prazer em lidar com grandes números que o estimulava a procurá-los, ou a exploração das suas possibilidades de cálculo e exercício do raciocínio? Ou a aplicação dos algoritmos aprendidos na aula?

Como a resistência de Daniel ao problema colocado por Tomás era muita e Sara e Bela não se manifestavam, Ana começou por sugerir um plano de resolução que interrompeu para saber o que pensava o aluno:

> Prof.ª- Por aquilo que já fizeram, vais-me dizer [Daniel] o que é que vocês já sabem do ano? Que quantidade gastam em 11 meses?
> Daniel- Mil seiscentos e setenta.
> Prof.ª- Pois é, mas agora falta-te aí o mês que tiraste. Podem ir por vários caminhos. Tomás, explica lá aos colegas como é que vais resolver esse problema?

A forma como Tomás se expressou oralmente não deixa claro se ele estava a raciocinar correctamente ou não, apenas transmite a ideia que quer ser o mais preciso possível no cálculo da pasta gasta. Mas desta vez, apesar da professora o inquirir, é Daniel quem estava atento às palavras de Tomás:

> Tomás- Primeiro tirava os anos bissextos.
> Prof.ª- Tiravas os anos bissextos como?
> Daniel- Se há anos bissextos não se podem tirar!

A professora procurava ajudar Tomás através de uma questão de confirmação. Era notório que o defendia da agressividade do colega que não pretendia desculpá-lo pela insistência em querer criar aquele problema:

> Prof.ª- Um ano tem 365 dias e 69 anos?
> Tomás- ... [mexe nas canetas]
> Daniel- Este agora em vez de pensar está a brincar com as canetas! [sarcasticamente]
> Prof.ª- Não. Ele está a pensar.

Ana sentia que devia apoiar o aluno, orientando o seu raciocínio, clarificando-lhe as ideias. Isto permitiu a Tomás verbalizar o procedimento a efectuar para executar parte do seu plano de resolução:

> Prof.ª- Tomás, agora vamos primeiro ver quantos dias há em 69 anos e depois acrescentamos-lhe os dias dos anos bissextos. Então, como é?
> Tomás- Fazemos uma conta de vezes. 365 vezes 69 e depois acrescentamos os dias dos anos bissextos.

Era preciso multiplicar. E, embora Sara tivesse afirmado na entrevista que do que menos gostava na matemática era de dizer a tabuada e que por não a saber tinha dificuldade nas contas, os dados evidenciavam a sua competência prática na técnica do algoritmo da multiplicação e na tabuada:

Daniel- Olha, aqui está errado , é 7.
Sara- é 7?
Daniel- Sim, olha lá: 9 vezes 5, 45 e vão 4. 9 vezes 6, 63 [Sara faz uma careta e ele corrige], ai 72 [ela franze as sobrancelhas e perante a incerteza de Daniel, acaba por dizer].
Sara- 54.
Daniel- Ah, 58 [completa].

Notou-se, assim, uma certa falta de autoconfiança evidenciada tanto em dados anteriores, como nestes. A aluna parecia partir do princípio que não era preciso esforçar-se para resolver a tarefa, uma vez que Daniel tinha boas capacidades para tal. Ao longo da aula, Sara pouco contribuiu para a formulação e resolução dos problemas criados, no entanto exigia que Tomás o fizesse:

Sara- Pronto, e agora o que é que fazemos [Tomás]? Copiámos. Agora tens de dizer o que é que fazemos!

Tomás continuava a verbalizar parte do seu pensamento sem que os colegas o percebessem. E Sara, que apesar de não ajudar à resolução, tinha demonstrado desejar fazer matemática com compreensão, pedia que ele lhe explicasse. Mas como o fazia de um modo pouco simpático, recebia também pouca simpatia da parte de Tomás:

Tomás- Agora são 17 ou 18 [anos bissextos].
Sara- Explica-me que eu não estou a perceber nada disso! [autoritariamente]
Tomás- Pensa.
Sara- Pensa também...

Daniel, Sara e Bela acusavam Tomás da situação gerada e afirmavam não pretender contribuir para a resolução do problema por ele criado. Eles estavam mais preocupados com a apresentação à turma, pois nenhum dos três pretendia fazê-lo.

Ao aproximar-se, a pretensão da professora era a de verificar se a actividade matemática estava a decorrer com normalidade e validar o resultado do trabalho realizado. Mas, enquanto Tomás já tinha efectuado todos os cálculos necessários, os outros três elementos tinham-se detido em interacções pouco produtivas.

Ana então, solicitou a Tomás que explicitasse a divisão indicada (69:4=) no seu registo para que os colegas compreendessem todos os passos da resolução. Isto serviria ao mesmo tempo para verificar os seus resultados. No entanto, Tomás nada verbalizava por estar magoado com o que lhe diziam:

Prof.ª- Agora explica-lhes [Tomás] o que fizeste.
Tomás-...
Prof.ª- Isto são todos os dias de 69 anos, não são?
Tomás- Eles não me ajudam, professora!
Prof.ª- Vá, fala para eles agora. Diz o que fizeste!
Tomás- Agora fiz a conta de dividir para saber quantos eram os dias dos anos bissextos.

Tomás tinha revelado bom raciocínio, porém continuava a ser pouco claro quando o verbalizava. A professora, que conhecia bem as suas dificuldades, ajudava-o a construir frases correctas, clarificando o seu pensamento:

Prof.ª- Devagar...
Tomás- 69...
Prof.ª- anos...
Tomás e Prof.ª- a dividir por 4.
Prof.ª- Porque é que foste dividir por 4?

Como Tomás sentia dificuldade, Ana apoiava-o nessa verbalização, questionando-o e sintetizando as suas ideias para o grupo entender melhor o processo:

Prof.ª- Porque o ano bissexto ...
Tomás- ...tem 4 anos.
Prof.ª- ...é de 4 em 4 anos... então, quantos anos são bissextos?
Tomás- Estou a pensar!
Prof.ª- Então!... está ali! [aponta para o quociente da divisão]
Tomás- 17
Prof.ª- Se há 17 anos bissextos, quer dizer que em cada um desses anos há mais um dia, não é?

Mas, de repente, parecia que Tomás deixava de perceber o sentido da divisão que efectuara.

Para que conseguissem levar a termo esta resolução, Ana sentia necessidade de gerir totalmente a situação, solicitando-lhes que escrevessem o que iam dizendo:

Prof.ª- Então, quantos dias é que há mais? Em cada ano destes há mais um dia, em Fevereiro... [olha Daniel que se mostra ausente]
Daniel- São 17.
Prof.ª- Então a este resultado têm de acrescentar os 17 dias, de Fevereiro... Vá, têm de juntar. Tomás, agora a este resultado juntas os 17, os 17 dias.

Apesar de Tomás ter sozinho concebido e executado parte do seu plano, quando calculou o número total de anos bissextos, continuava a não encontrar sentido para o que tinha feito. Estaria ele emocionalmente tão debilitado que se sentia confuso? Ana, procurou, então interagir com o aluno explicando-lhe o seu próprio procedimento e ajudando-o a focalizar-se no problema, acabando por lhe sugerir a representação icónica da ideia matemática em causa:

> Tomás- Mas ainda tenho de saber os 4 anos bissextos.
> Prof.ª- Não são 4. Foste aos 69 anos e dividiste em 4, porque os anos bissextos são de 4 em 4. Ora faz aqui 69 pauzinhos.

Tomás fez os 69 risquinhos e Ana, incentivando o bom ambiente entre os alunos, procurou reatar o diálogo e o trabalho colaborativo entre os dois alunos:

> Prof.ª- [em tom baixo para Tomás não se enganar] Daniel, agora tu podes ir começando a contar: 1-2-3-4, pões uma cruz: bissexto [nos pauzinhos que o Tomás fizera].

Depois de terem "contado de 4 em 4 para saber quantos bissextos lá havia", a professora lembrou os alunos da pergunta para a qual se pretendia uma resposta, validando de um modo afirmativo as suas respostas:

> Prof.ª- Aqui estão os 17! Os 17 dias que há a mais! Agora que já sabem os dias todos... O que é que vocês querem saber mesmo? Não é quanta pasta gastam?

Assim, no sentido de incentivar as alunas a concluirem o processo, Ana lembrou-lhes o que era necessário para concluir esta resolução:

> Prof.ª- [olhando Bela] Agora é só descobrir quanta pasta gastam. Calcular! Quantos dias são? Quantos dias deu? O Tomás já está a fazer e o Daniel também.

Também com a intenção de conhecer e dar a conhecer o modo de pensar de Daniel, a professora inquiriu-o acerca do procedimento por ele realizado, sintetizando depois as ideias:

> Prof.ª- Daniel, explica a todos o que é que fizeste.
> Daniel- 25 202 vezes 5.
> Prof.ª- Porquê vezes 5?
> Daniel- Porque o Miguel lava 3 vezes por dia e a Clara lava 2.
> Prof.ª- Porque num dia...
> Daniel- Lavam os dentes 5 vezes.
> Prof.ª- Num dia lavam os dentes 5 vezes, gastam cinco centímetros. Portanto em 25 202 dias vão gastar o resultado dessa conta!

Explorar o trabalho com números grandes é um aspecto que parece não ter sido menosprezado. Mas os alunos continuam a revelar dificuldades na leitura destes números.

Daniel sentia-se autoconfiante. Quando a professora se afastou, ele dizia para Bela que "fazia isto... estava era a fazer de conta!..."

Depois do afastamento de Ana, Daniel estabeleceu novo diálogo com Tomás. Dessa interacção ressaltou uma convicção dos alunos: sem o ensino prévio das operações, eles não poderão resolver as situações. Isto pode ser consequente da ideia de que o objectivo da resolução de problemas é aplicar os algoritmos ensinados, constituindo assim, um grande obstáculo à formulação e resolução de problemas:

> Daniel- [em voz mais alta, falando para Tomás]- E agora ainda vamos ter de saber quantos tubos são!
> Tomás- É só dividir por 135.
> Daniel- Então vá, divide!
> Bela- Ah, nós já aprendemos a dividir por 135?
> Tomás- Pede ajuda à professora.
> Daniel- Yá, já aprendemos a dividir [por um número de três algarimos], não é?
> Bela- Nós só ainda aprendemos com dois.
> Sara- Nós não vamos fazer com três números, nós ainda não sabemos.

Ao observarmos o registo escrito de Tomás verificamos que o aluno tentou calcular o quociente da divisão por três algarismos usando um processo de resolução do algoritmo muito sintético, vindo a abandoná-lo de seguida, sem conseguir resolvê-lo.

O empenhamento dos alunos continuava a ser diminuto. Ana estava preocupada com o desenvolvimento do trabalho em grupo e, por isso aproximava-se de novo, repetindo a pergunta. Daniel, muito criticamente, aproveitou para pôr em causa a adequação do problema à realidade, mesmo sem lhe ter sido pedido que o fizesse:

> Prof.ª- Que quantidade de pasta gastou em 69 anos?
> Daniel- Coitados dos miúdos, em 69 anos! Acabaram a pasta e já eram velhotes [sorri com ironia] bem...andaram com essa pasta montes e montes...

Era notório que Daniel não encontrava significado para o que faziam.

Percebia-se que Ana depositava algumas expectativas no grupo ao tentar incentivar os alunos a dar uma resposta mais adequada à realidade, para além de pretender despertá-los para outros possíveis problemas:

> Prof.ª- Agora vocês podiam ver é quanto é que é isso em tubos. Agora podíamos fazer aí uma quantidade de problemas seguidos...

A professora insistiu na sugestão, esperando uma resposta oral :

> Prof.ª- Rapidamente só uma coisa: podiam ir transformar isto em tubos de pasta. Têm esta pasta toda e cada tubo tem 135 cm. O que é que faziam?
> Daniel- Dividíamos.

Mas, seria que se os alunos tivessem calculado o número de tubos a que aquelas centenas de milhar de centímetros de pasta correspondiam, teriam encontrado mais sentido na questão formulada? Talvez não, pois este foi um problema que não mereceu à partida o seu entusiasmo.

Ana começou então a dirigir questões aos elementos do grupo que ela sabia serem menos competentes na prática de traduzir situações em operações:

> Prof.ª- Dividiam para saber quantos tubos. Depois, para saber quanto é que a mãe gastou nesses tubos todos... o que é que faziam? Imaginem que dava 48 tubos, não dá, dá mais, mas o que é que faziam para saber que dinheiro é que a mãe gastou nos 48 tubos? Bela.

Nesta interacção, a professora apresentou, conscientemente e apenas como exemplo, uma estimação muito aquém do resultado da operação numérica a ela subjacente. Mas era evidente que lhe interessava que os alunos soubessem aplicar a multiplicação como produto de factores que traduzia uma soma repetida de parcelas iguais, na situação que propunha. A partir deste ponto, o problema adquiriu um carácter secundário. O propósito passou a ser utilizar uma nova questão que, embora estivesse relacionada com o problema, serviria para ensinar a aplicar o algoritmo da multiplicação.

> Prof.ª- Qual era a operação que tu fazias? Um tubo...custa isto [aponta para o texto].
> Bela- Ia somar.
> Prof.ª- Somar... 48 vezes? Em vez de somares...
> Bela- Vezes.
> Prof.ª- Multiplicavas. Se não dava-te um algoritmo muito grande. Quando tens o preço de um e queres saber o preço de muitos, multiplicas. Se somasses dava-te um algoritmo que nunca mais acabava...

Percebendo que Sara estava alheia ao seu diálogo com o grupo, a professora, resolveu verificar se a aluna tinha aprendido a aplicar o algoritmo da divisão a uma situação que tinha sido falada no grupo e repetiu a pergunta que tinha feito a Daniel:

> Prof.ª- Diz-me, Sara, se quiseres transformar estes centímetros de pasta em tubos de 135 centímetros cada um, o que é que tu fazes?.....Isto é a pasta toda, e tu queres metê-la em tubos. O que é que tu fazias para a colocares em tubos, para saberes em quantos tubos a ias meter?
> Sara- Multiplicava.

Sara não respondeu de acordo com o que a professora esperava e, para evitar o fracasso da aluna, Ana procurou ajudá-la, de uma forma subtil, utilizando termos que se podem associar à operação *divisão*, até acertar:

> Prof.ª- Multiplicavas? Não filha, não podias multiplicar! A pasta está toda junta e tu vais colocar essa pasta em tubos. E eu quero saber quantos tubos tu vais utilizar. Não vais distribuir esta pasta toda pelos tubos, até eles estarem cheios? O que é distribuir?
> Sara- É dar.
> Prof.ª- E o que é esse dar?
> Sara- É meter.
> Prof.ª- E o que é esse meter?
> Sara- É fazer uma conta de dividir.
> Prof.ª- Pois, dividias essa pasta toda [acompanha as palavras com o gesto de apontar para as quantidades em questão] por 135. Pronto.

Notou-se o interesse da professora em que os alunos reconhecessem o valor das técnicas ensinadas. O problema serviu de suporte para explicar essas técnicas ou aplicar algoritmos. Para tal, Ana voltou a questionar Sara. No entanto, a aluna parecia não ter adquirido ainda essa noção:

> Prof.ª- Então o que fazes para saberes o preço de 78? Sabes o preço de um tubo e queres saber o preço de 78 tubos.
> Sara- Somava
> Prof.ª- Somas tubos com dinheiro!? Quanto é que custa um tubo?

A professora procurou, então, utilizar situações próximas da realidade da criança para formular problemas análogos ao anterior :

> Prof.ª- 2 euros e meio. A tua mãe vai à loja e compra uma pasta [retira uma caneta do estojo da aluna] que lhe custa 2 euros e meio. Mas, se a tua mãe comprar 5 pastas [retira mais 4 canetas], qual é a conta que tu fazes para saber quanto é que a tua mãe gastou?...Quanto é que custa uma?
> Sara- 2 euros e meio
> Prof.ª- quanto custam as 5? Que conta é que tu fazias?

Como a aluna não respondia, Ana tentava servir-se de uma realidade ainda mais próxima em que os valores também fossem mais facilmente manipulados pela aluna:

> Prof.ª- Vais à loja e compras um rebuçado. Quanto é que custa um rebuçado na loja? Sabes? Quanto é que tu achas que custa?
> Sara- 50 cêntimos.
> Prof.ª- 50 cêntimos. Era um chupa-chupa, mas tu vais comprar dois: um para ti, outro para a mana [fica apenas com 2 canetas na mão], quanto gastas?
> Sara- Um euro.
> Prof.ª- Que conta fizeste?
> Sara- Somei.

Em conversa informal, Ana tinha-me dito que Sara não tinha ainda adquirido o conceito de multiplicação. Por isso, pretendia aproveitar todas as ocasiões para que a aluna associasse a adição de parcelas iguais à multiplicação. Assim, novamente de uma forma subtil, fez essa associação:

Prof.ª- 50 com 50. Que outra conta podias fazer? Imagina que compravas 5 chupas e ias dar aos primos. Que conta fazias agora?
Sara- Uma conta de mais só com 50 cêntimos.
Prof.ª- E se não quisesses fazer uma conta de mais?
Sara- [sem hesitar] fazia uma de vezes.

Sara tinha relacionado a adição de parcelas iguais com a multiplicação. Por isso, a professora voltou ao problema inicial, pretendendo confirmar se a aluna aplicaria a multiplicação imediatamente, dando-lhe pistas para que não fracassasse:

Prof.ª- Dizes 500 tubos de pasta. E se ela comprasse quinhentas pastas tu achas que para saber o preço de todas, ela ia somar 2 euros e meio quinhentas vezes por ali abaixo? Qual era a conta que ela fazia?
Sara- De vezes.
Prof.ª- Era a conta mais simples para saber quanto é que a mãe gastava.

Tinham decorrido aproximadamente duas horas e todos os grupos tinham terminado os trabalhos. Concordámos, por isso, passar à apresentação de cada grupo.

3.ª parte da actividade: comunicação à turma dos problemas matemáticos criados e dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo para o(s) resolver

Nesta sessão, as comunicações dos trabalhos realizados foram feitas pelos alunos que recorreram à folha onde o porta-voz tinha efectuado os registos, com excepção de um grupo que se serviu também do quadro para o fazer.

O primeiro grupo a apresentar os seus problemas matemáticos à turma foi representado por Júlio. O aluno começou por ler o pequeno resumo, feito em grupo, da situação proposta na tarefa. Nele estavam as condições do problema criado e, por fim, a questão: "quanto é que os dois irmãos usam de pasta de dentes em dois meses?". O problema formulado foi resolvido através de uma esquematização dos dados e dos resultados (ver Figura 22).

O aluno apresentou com facilidade o trabalho efectuado, mostrando ter percebido o processo em que tinha estado envolvido, como evidenciam os diálogos:

> Júlio- Aqui estão os meses que escolhemos: Maio e Junho. Aqui está o que o Miguel gastou e aqui o que a Clara gastou. Em Maio, o Miguel gastou 93 centímetros e a Clara 62. Em Junho, o Miguel gastou 90 e a Clara 60. Aqui juntámos e vimos que o Miguel gastou 183 e a Clara 122. Depois juntámos tudo e vimos que ao todo eles gastaram 305 centímetros de pasta de dentes.
> Prof.ª- Será que um tubo foi suficiente para esses dois meses?
> Júlio- Não.
> Prof.ª-Como é que sabes que não?
> Júlio- Porque um tubo tem 135 e eles gastaram 305.
> Prof.ª- De quantos precisaram?
> Júlio- [olhando a folha] de três e ainda sobrou.

No final da apresentação a professora informou que "eles fizeram dois problemas", mas apenas apresentavam um .

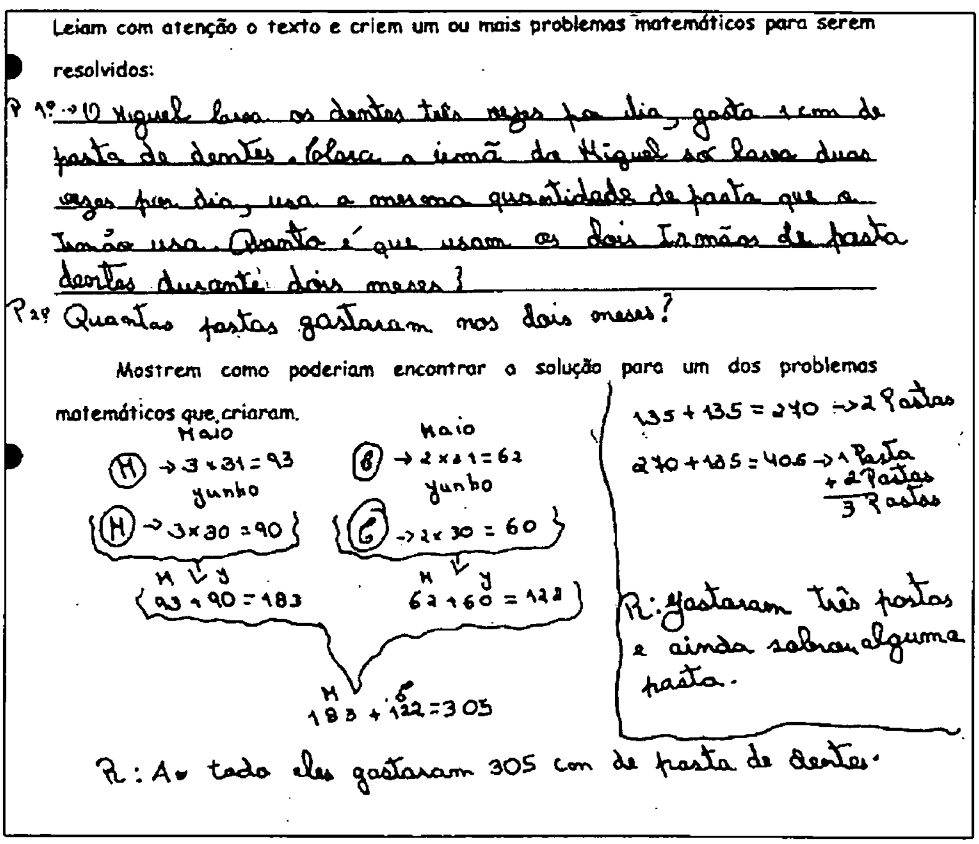
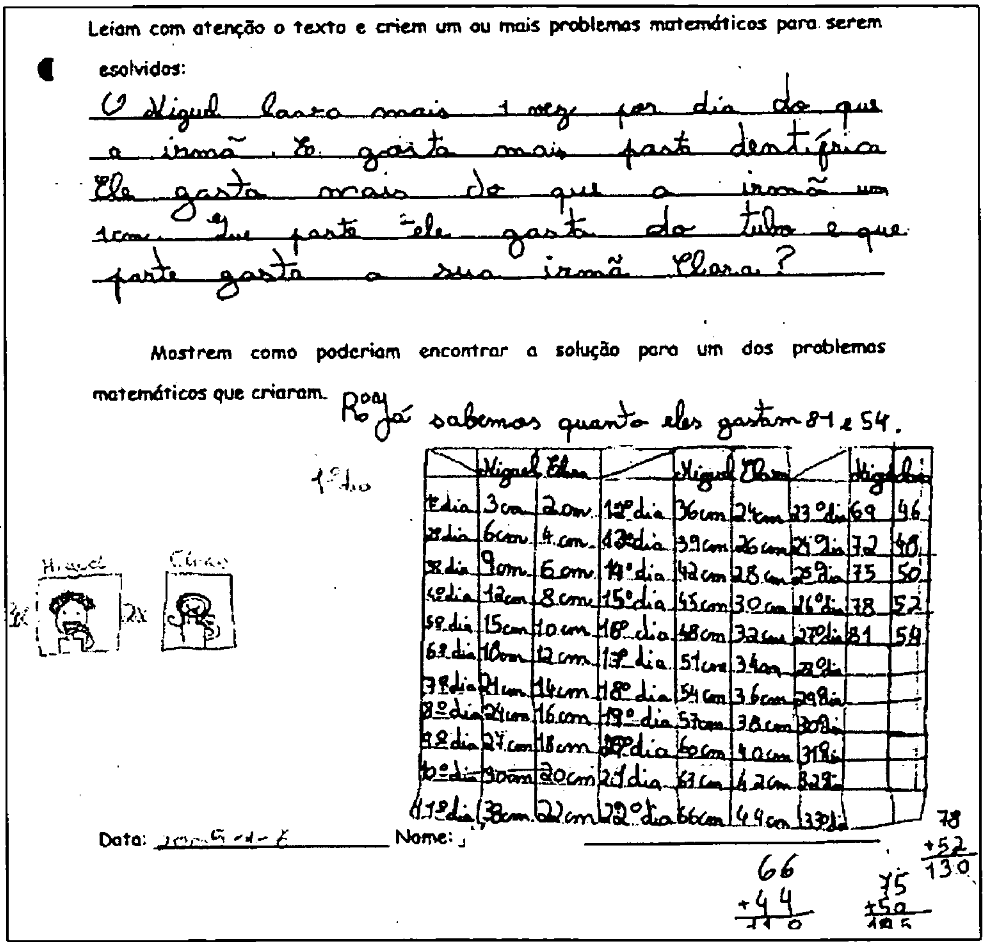


Figura 22 – Formulação e resolução de dois problemas efectuadas pelo grupo de Júlio na tarefa *Higiene dentária*.

De outro grupo veio o Jonas mostrar a tabela criada (ver Figura 23) para ajudar a resolver o problema formulado. Os alunos deste grupo também começaram por escrever um pequeno texto introdutório à questão. A questão era: “que parte ele gasta do tubo e que parte gasta a sua irmã Clara?”. Enquanto Jonas segurava a folha para que toda a turma visse a tabela com os resultados obtidos (ver Figura 23), um colega de grupo, o Manuel foi lendo os dados nela introduzidos.


Leiam com atenção o texto e criem um ou mais problemas matemáticos para serem esolvidos:

O Miguel lava mais 1 vez por dia do que a irmã. E gasta mais pasta dentífrica. Ele gasta mais do que a irmã um 1cm. Que parte ele gasta do tubo e que parte gasta a sua irmã Clara?

Mostrem como poderiam encontrar a solução para um dos problemas matemáticos que criaram.

R: Já sabemos quanto eles gastam 84 e 54.

	Miguel	Clara		Miguel	Clara		Miguel	Clara
1.º dia	3cm	2cm	12.º dia	36cm	24cm	23.º dia	69	46
2.º dia	6cm	4cm	13.º dia	39cm	26cm	24.º dia	72	48
3.º dia	9cm	6cm	14.º dia	42cm	28cm	25.º dia	75	50
4.º dia	12cm	8cm	15.º dia	45cm	30cm	26.º dia	78	52
5.º dia	15cm	10cm	16.º dia	48cm	32cm	27.º dia	81	54
6.º dia	18cm	12cm	17.º dia	51cm	34cm	28.º dia		
7.º dia	21cm	14cm	18.º dia	54cm	36cm	29.º dia		
8.º dia	24cm	16cm	19.º dia	57cm	38cm	30.º dia		
9.º dia	27cm	18cm	20.º dia	60cm	40cm	31.º dia		
10.º dia	30cm	20cm	21.º dia	63cm	42cm	32.º dia		
11.º dia	33cm	22cm	22.º dia	66cm	44cm	33.º dia		

Data: Nome:

66 + 44 = 110

75 + 50 = 125

78 + 52 = 130

Figura 23 – Formulação e resolução de um problema efectuadas pelo grupo de Jonas.

Perante a pergunta “alguém tem dúvidas?”, ninguém se manifestou. Então Ana explicou como tinham iniciado o preenchimento da tabela, procurando que todos compreendessem:

Prof.ª- Eles fizeram a tabela e foram colocando: 1.º dia, 2.º dia etc. até chegar ao...?
Manuel- ...ao 27.º

Em seguida, colocou algumas questões ao grupo. Umas visavam a confirmação de que o aluno tinha seguido o raciocínio, outras, o esclarecimento acerca do modo como ele pensava ter chegado à solução:

> Prof.ª- Então, ao 27.º dia quanto deu Manuel?
> Manuel- 81centímetros gastou o Miguel e 54 centímetros gastou a Clara.
> Prof.ª- E como é que souberam que terminava aí?
> Manuel- Fizémos as contas.
> Prof.ª- Fizeram as contas? Explica-te melhor.

Manuel continuou a explicitar a forma como conseguiram completar o trabalho:

> Manuel- No 22.º dia vimos que já tinham muita pasta gasta, então juntámos 66 do Miguel com 44 da Clara. Deu 110. Continuámos porque ainda faltava um bocado. Depois juntámos no 25.º. Dava 125. Não chegava. Depois juntámos no 26.º, dava 130. Então só faltava um dia, era no 27.º que eles acabavam a pasta toda do tubo.

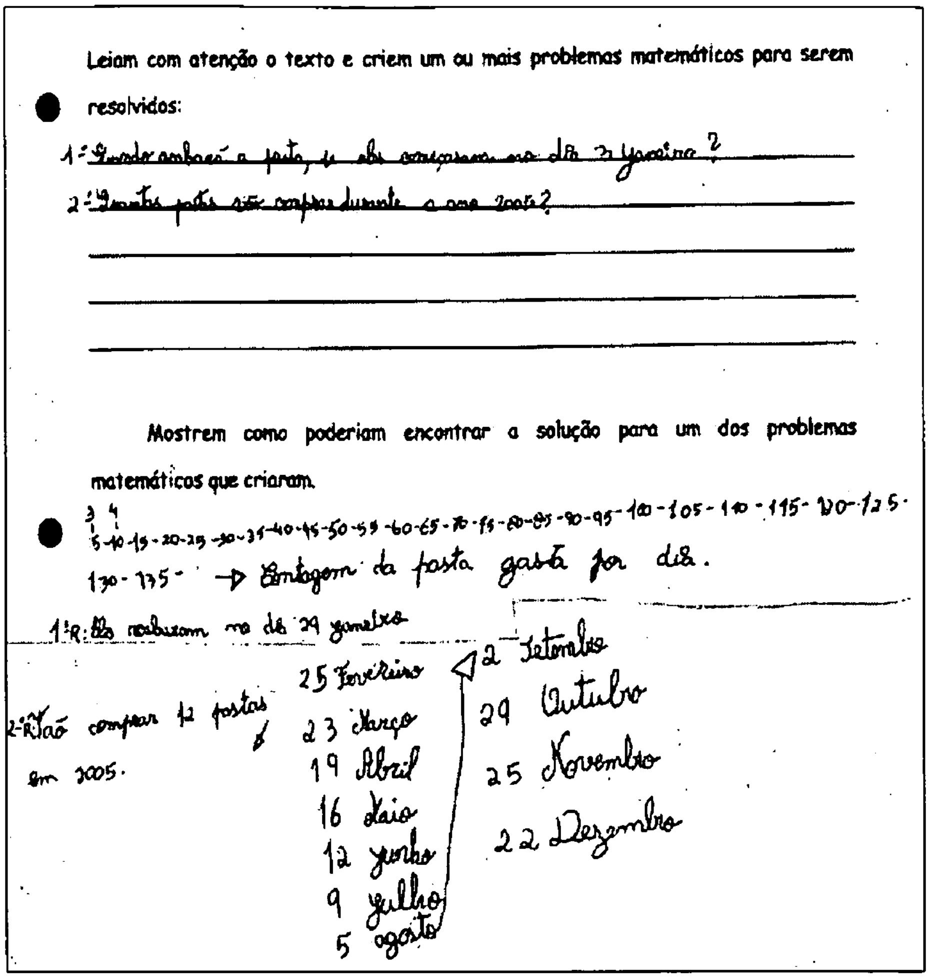
A professora procurou também, nesta parte da aula, inquirir os alunos do grupo, no sentido de saber se eles próprios fizeram uma previsão dos resultados e se os avaliaram. Notou-se que o grupo criou boas relações entre os elementos e isso revelou-se sobretudo no momento em que ajudaram Paulo, um aluno com muitas dificuldades nesta área:

> Prof.ª- Eu volto a fazer a pergunta: antes de começarem a preencher a tabela, quem é que vocês esperavam que gastasse mais pasta?...ele ou a Clara?
> Paulo- O Miguel...[inseguro]
> Prof.ª- Porque é que achavas que o Miguel ia gastar mais pasta?
> Paulo - [ajudado pelos colegas] Porque ele lavava uma vez mais que a irmã, todos os dias.

Foi a vez de Mónica apresentar o trabalho do seu grupo (ver Figura 24).

Foi curioso observar que durante a resolução da tarefa o grupo chegou a debater se "criar problemas matemáticos" era colocar uma questão ou algo mais. Para Mónica um problema estava associado a um texto, mas para Pedro para haver problema bastava formular uma pergunta. Os alunos concordaram que naquele caso só faltava a pergunta para o problema estar formulado:

> Mónica- A gente primeiro leu tudo com atenção e depois eu achava que tinhamos de fazer o problema e o Pedro achava que tinhamos de fazer a pergunta porque já estava lá tudo. Então depois, fizemos a primeira pergunta: quando acabará a pasta se eles começaram no dia 3 de Janeiro?



Leiam com atenção o texto e criem um ou mais problemas matemáticos para serem resolvidos:

Mostrem como poderiam encontrar a solução para um dos problemas matemáticos que criaram.

5-10-15-20-25-30-35-40-45-50-55-60-65-70-75-80-85-90-95-100-105-110-115-120-125-130-135- → Contagem da pasta gasta por dia.

25 Fevereiro
23 Março
19 Abril
16 Maio
12 Junho
9 Julho
5 agosto
2 Setembro
29 Outubro
25 Novembro
22 Dezembro

Figura 24 – Formulação e resolução de dois problemas efectuadas pelo grupo de Mónica.

A aluna fez a explicitação dos passos que tinham seguido para responder à tarefa proposta revelando ter participado activamente em todo o processo:

> Mónica- A gente contou de 5 em 5 até 135 e escrevemos: contagem da pasta gasta por dia. Depois, como eles começaram no dia 3, começamos a contar os dias : 3, 4, 5...e vimos que eles acabaram a pasta no dia 29 de Janeiro.

O grupo tinha criado uma representação própria para resolver o seu problema e Ana sentiu que Mónica precisava dela no quadro para se fazer entender. Assim, pediu à aluna que fosse fazendo no quadro o que tinham feito na folha para que os colegas percebessem o seu raciocínio. Por outro lado, a professora foi procurando saber quais eram os referentes da aluna, promovendo a negociação na sala de aula:

> Prof.ª- Vá, diz lá como é que fizeram essa contagem?
> Mónica- Fizemos assim: tínhamos a contagem da pasta que eles gastaram por dia, [apontou para a contagem de 5 em 5 até 135], depois contámos os dias nessa contagem:

o 3 no 5, o 4 no 10 [foi escrevendo por cima da contagem anterior] e sempre assim, até que chegámos ao 29 no 135.
Prof.ª- E o que quer dizer o 29 no 135?
Mónica- Quer dizer que no dia 29 eles acabaram a pasta, porque um tubo tem 135 centímetros, não tem mais.

Estes alunos encararam a resolução de problemas como algo desafiante, em que poderiam pelos seus próprios processos chegar à solução:

Mónica- Depois fizemos a 2.ª pergunta: "quantas pastas vão comprar durante o ano 2005?". Então a gente contou a partir do dia 29 de Janeiro, que era a resposta do 1.º problema, até ao 135; depois Fevereiro deu 25; Março deu 23, Abril deu 19, Maio deu 16, Junho deu 12, Julho deu 9, Agosto deu 5, Setembro deu 2, Outubro deu 29, Novembro deu 25 e Dezembro deu 22. Estes foram os dias em que eles tinham de comprar pasta de dentes.

Parecia ter sido a forma como os alunos encararam a resolução deste problema que levou a professora a acompanhar com interesse a explicitação desta aluna, colocando-lhes questões no sentido de saber como é que os alunos tinham resolvido a tarefa, fazendo-a explicar pormenorizadamente o processo da resolução do problema que tinham criado. Os colegas parece que apenas desejavam conhecer o resultado a que o grupo tinha chegado:

Prof.ª- Ó Mónica, eu não percebi onde é que vocês foram contar os dias dos meses. Faz lá no quadro.
Mónica- Então, nós já tínhamos feito a contagem gasta por dia, não era? Então, no dia 29 acabava a pasta e depois fomos contando: 30 [volta ao inicio e toca com o giz no 5], 31 [toca com o giz no 10], 1 de Fevereiro [toca com o giz no 15] e sempre assim... acabava um mês começávamos outro.
Mara- E a resposta?
Mónica- [lendo] A resposta é: vão comprar 12 pastas em 2005.

Ana, formulando uma outra questão, questionava de novo Sara, a propósito do dado verbalizado por Mónica. A professora pretendia saber se a aluna sabia aplicar a multiplicação, como alternativa à adição de parcelas iguais, naquele caso:

Prof.ª- Pronto! A mãe vai comprar 12 pastas em 2005. E se eu quiser saber quanto é que a mãe vai gastar nessas 12 pastas, o que é que eu faço, Sara?
Sara- Multiplicar
Prof.ª- O quê?
Sara- As 12...
Prof.ª- Multiplicava as 12 pastas por...
Sara- ... [olha fixamente a professora, mas não responde, nem olha para a folha]

Mas a aluna, apesar de ter obtido a validação da professora acerca da operação aritmética a realizar, sentiu dificuldade em partilhar e negociar esse significado. Talvez Sara tivesse apenas dito o que sabia que a professora queria ouvir, uma vez que tinha insistido tanto na multiplicação anteriormente. Só quando Ana lhe colocou uma questão para confirmar um dos dados do problema é que a aluna completou as palavras da mesma:

Prof.ª- Então, quanto custa uma pasta!?
Sara- 2 euros e meio.
Prof.ª- Então... multiplicava as 12 pastas por...
Sara- 2 euros e meio.

Contudo, Sara mostrava não ter desenvolvido ainda a noção de que a multiplicação pode corresponder a uma adição de parcelas iguais.

Finalmente, chegava a vez do grupo em foco apresentar o seu trabalho (ver Figura 25). A professora pediu o porta-voz e Daniel mostrou ali mesmo, em grande grupo, ter havido um conflito, revelando que a sua ideia de porta-voz é sinónimo de quem sabe mais do trabalho desenvolvido ou de quem deu mais ou melhores ideias para o trabalho.

- Leiam com atenção o texto e criem um ou mais problemas matemáticos para serem resolvidos:

Quantos tubos de pasta a mãe tem de comprar no mês de Abril?
E agora em 11 meses?
Que quantidade de pasta gastam em 69 anos?

- Mostrem como poderiam encontrar a solução para um dos problemas matemáticos que criaram.

5x30 = 150 R: A mãe tem de comprar dois tubos de pasta em Abril e sobra pasta de dentes.
5x334 = 1670 R: A mãe em 11 meses compra 5 tubos de pasta de dentes e sobra pasta.
Os meses são de Janeiro a Novembro.
Nós tirámos 31 dias ao ano todo.

Figura 25 – Formulação e resolução de problemas efectuadas pelo grupo em foco.

Porém, apesar de Ana tentar, por bem, que comunicassem o problema criado, bem como a sua resolução, Daniel insistia em não querer:

> Daniel- Professora, ele [o Tomás] é que deve ir, ele é que sabe mais!
> Prof.ª- Por favor, vocês são um grupo! E a primeira pergunta não é dele!
> Daniel- Eu só sei a primeira e ele faz a dele.

Ana, sabendo do conflito e da falta de colaboração do grupo no desenvolvimento dos trabalhos, tentou usar de uma certa autoridade que lhe é conferida como professora:

> Prof.ª- Não. Agora vamos fazer ao contrário. Ele apresenta a tua e tu apresentas a dele. Tomás, começa a falar dos problemas matemáticos que o grupo criou.

A sua atitude parecia ter dois objectivos. Primeiro, perceber se o processo tinha sido compreendido por ambos os alunos. Segundo e mais geral, mostrar que, para além de devermos contribuir para a resolução da tarefa, devemos também ouvir as ideias dos outros, colaborando para um fim comum a todo o grupo.

Tomás começou a falar com a voz embargada, mas ganhou coragem suficiente para dizer frente a todos: "professora, não percebi nada do dele". Ana, sensível a tal situação, voltou atrás na sua decisão dizendo: "pronto, vais então explicar a tua".

Depois de ler o seu problema, Tomás utilizou a primeira pessoa do plural para falar da sua resolução (ver Figura 26). Afinal todos os elementos do grupo tinham participado de uma forma mais ou menos activa nesse processo. No entanto, apenas conseguiu explicar os procedimentos utilizados:

> Tomás- Quanta pasta gastam em 69 anos?...nós fizemos 365 vezes 69 e deu-nos 25 mil 185. Depois, fomos buscar os 69 anos dos 4 anos dos anos bissextos... deu-nos 17. Depois fiz estes paus e fomos acrescentando os 17 para ver se estava certo, depois demos a resposta.

Ana preferia não comentar a apresentação feita por Tomás. Notou-se que tinha ficado muito incomodada.

Seguidamente veio Daniel apresentar os problemas imaginados pelos restantes elementos do grupo (ver Figura 25), assim como a forma que encontraram de os resolver:

> Daniel- Primeiro começámos a pensar que problema íamos fazer. Então fizemos: "quantos tubos de pasta a mãe ia comprar num mês, de Abril?". Fizemos primeiro a conta 5 vezes 30, o resultado: 150. Depois, o Tomás como não estava satisfeito com a coisa, queria fazer cada vez maior e por meses. Então fizemos 11 meses e fizemos: 5

vezes trint...trezentos e trinta e quatro que nos deu igual a 1670. A resposta foi “a mãe em 11 meses compra 5 tubos de pasta de dentes e sobra pasta”.

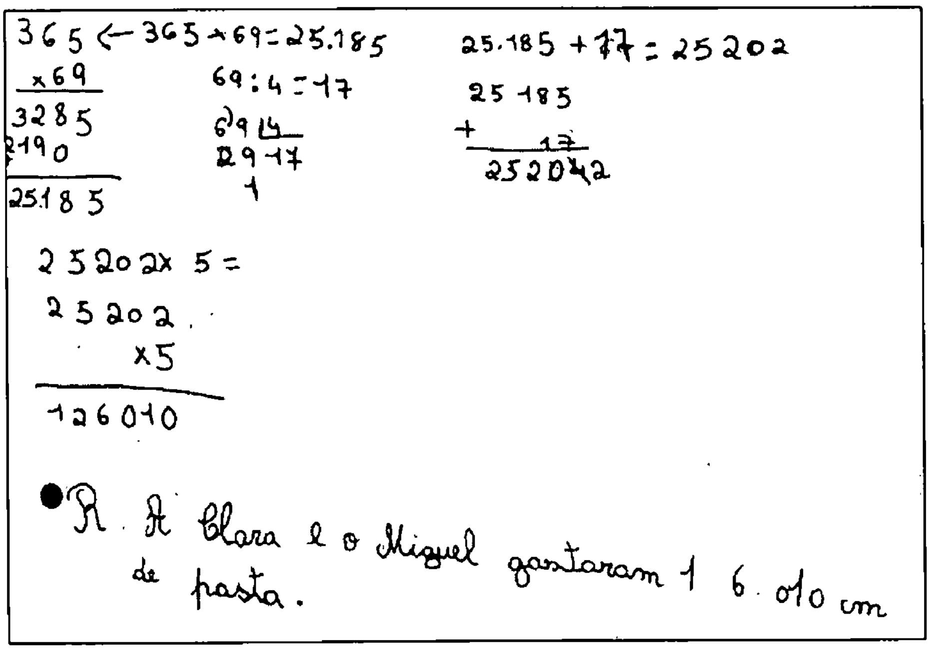


Figura 26 – Resolução do problema matemático criado por Tomás, do grupo em foco.

Estranhando o resultado verbalizado por Daniel (5 tubos para onze meses e sobra pasta) e, percebendo que os alunos da turma exibiam alguma passividade e falta de espírito critico em relação aos resultados apresentados, decidi colocar eu mesma uma questão ao grupo, para incentivar a discussão colectiva, depois de lhe ter pedido que repetisse o resultado que encontrou:

> Prof.ª- Como é que concluíram que a mãe compra 5 tubos em 11 meses e sobra pasta?
> Daniel- ... [demorou algum tempo a responder] A Sara tinha dito que gastava por ano 5 tubos, então... [franze a testa e encolhe os ombros].

A questão foi depois passada para a turma. Foi interessante verificar como Mónica e Manuel fizeram as suas interpretações, relacionando os resultados obtidos pelos seus grupos com os obtidos pelo grupo de Daniel:

> Mónica- Professora... não pode ser! 11 meses, falta um mês para ser um ano... nós no nosso fomos saber quantas é que compravam no ano de 2005 e deu 12 pastas [tubos]. Por isso não pode ser 5. São 11!
> Manuel- Ah! E na nossa tabela eles gastam a pasta quando chegam ao 27.º dia...é quase um mês. Por isso, se cada pasta dura para 27 dias que é quase um mês... para onze meses... devia ser era 11 pastas [tubos], mais ou menos...

Por fim, a professora fez ver ao aluno que, ao aceitar as ideias de Tomás tinha dado a si próprio a oportunidade de aprender mais.

Ana termimou a aula elogiando o trabalho desenvolvido por todos os alunos. Lembrou-os também que apesar de terem sido baseados na mesma situação, os problemas criados tinham sido diferentes, não se tendo esgotado as possibilidades. A professora manifestou, ainda, enorme interesse pelas diferentes abordagens ou estratégias usadas pelos alunos para resolverem os seus problemas matemáticos.

Comentário global

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos criassem problemas matemáticos a partir de uma situação artificial, colocada no enunciado e, depois, procedessem à resolução de um deles.

A análise dos dados mostrou que os grupos demoraram relativamente pouco tempo na formulação dos seus problemas, fazendo-o, no geral, com empenho. Dos quatro grupos, dois apresentaram um resumo das condições do problema que pretendiam formular e outros dois, incluindo o grupo em foco, apresentou apenas as questões a serem resolvidas. De uma maneira geral os alunos conseguiram apresentar as soluções para os seus problemas.

Relativamente ao grupo em foco, observou-se que Daniel formulou problemas mais simples do que os que é capaz de realizar. Tomás, ao contrário de Daniel, formulou um problema de vários passos (quatro na sua resolução), aumentando assim, a grandeza do número na resposta. Contudo, e apesar de Tomás ter participado na resolução desses problemas, foi difícil para os outros três elementos considerarem o problema que Tomás gostaria de ver resolvido. Isso só foi efectivamente concretizado com a intervenção e encorajamento da professora.

As questões formuladas por Daniel[9] estão relacionadas com o quotidiano das crianças e dão a ideia de pretenderem fazer matemática com uma certa compreensão. A formulada por Tomás[10] e que Daniel adaptou para "Que quantidade de pasta gastam em 69 anos?", mostrou uma fraca relação entre as situações reais ou do mundo real descrito no enunciado e as ideias matemáticas propostas pelo problema criado.

---

[9] "Quantos tubos de pasta a mãe tem de comprar no mês de Abril?"; " E em 11 meses?"
[10] "Quanta pasta gastam em 69 anos?"

Tomás transmitiu a sua ideia de problema difícil como mais entusiasmante ao insistir que os problemas criados pelos outros elementos eram muito fáceis e se resolviam apenas com o cálculo numérico, sem algoritmo. Assim, parecia que a concepção que tinha de dificuldade estava relacionada com a complexidade computacional provocada pelo número de passos dados na procura da solução. Este tipo de representação mental é consistente com uma visão convencional da Matemática que tende a não relacionar a Matemática com o mundo real. Para além de ficar também a ideia de que Tomás se sentia atraído por números grandes que podiam constituir a dificuldade do problema. Dificuldade essa que podia passar pela leitura dos números e comparação da sua grandeza com outros, de modo a saber avaliar os resultados. Nesse caso, pode ainda dizer-se que Tomás teve a oportunidade de formular um problema que foi ao encontro do seu interesse, mas não do interesse do grupo que criticava a adequação desse problema à realidade dizendo que "quando a pasta acabasse já estavam velhotes".

Há ainda a referir que, embora no geral os grupos se tivessem empenhado na formulação de problemas, o envolvimento de cada um dos elementos não foi igual. Por exemplo, Bela e Sara, limitaram-se a concordar com as decisões de Daniel e a discordar das sugestões de Tomás, sem contudo argumentar as razões que as levavam a tomar tais posições.

Relativamente às etapas da resolução de um dos problemas, pode dizer-se que a primeira, ou seja a compreensão do problema foi realizada em colectivo, com toda a turma. A professora conduziu a interpretação do enunciado da proposta e os alunos responderam às questões colocadas, revelando algumas dificuldades de compreensão do texto por falta de leitura.

A segunda e a terceira etapas, ou seja estabelecer um plano e executá-lo, ocorreram durante o trabalho em grupo; sendo que Daniel e Tomás estabeleceram um plano e resolveram o primeiro problema criado, sem solicitar ajuda ou mostrar dificuldade. Mas para o segundo problema, os dois alunos estabeleceram o plano, mas só Daniel o executou sem, contudo, verificar se os dados a utilizar estavam correctos. Para o terceiro problema, foi Tomás quem estabeleceu o plano de resolução, mas para o executar necessitou da ajuda da professora. Esta fê-lo questionando quer Tomás, quer Daniel.

A última etapa, a da verificação dos resultados, foi apenas efectuada com a professora, enquanto trabalhavam em grupo e como validação dos resultados que apresentavam e dos dados com que trabalhavam. No caso do grupo em foco, os alunos limitaram-se a dar uma resposta baseada nos resultados obtidos e na estimação numérica de Sara. No entanto, mostravam-se bastante confiantes no que faziam. De um modo geral, quando os trabalhos desenvolvidos em grupo eram apresentados, os alunos mostravam-se pouco reflexivos, só o fazendo quando foram solicitados.

Os diálogos evidenciam a ausência de interpretação e de avaliação dos resultados obtidos por iniciativa do grupo em foco. Possivelmente, por pouca prática na monitorização dos seus processos de resolução de problemas. Parece-me que uma avaliação crítica do problema formulado por Tomás teria sido muito oportuna. Como dizia Daniel, 69 anos é mais do que a idade da sua mãe. Poderiam, nesse caso, surgir questões como: será que um adulto usa a mesma pasta de quando era criança? Os tubos contém a mesma quantidade de pasta daqui por um ano? E durante 69 anos? Gastamos sempre a mesma quantidade de pasta ao longo da vida?

Outro aspecto a sublinhar foi o facto de Daniel, na execução do plano do seu segundo problema, ter usado um dos dados do enunciado da tarefa em vez de um outro que pertencia aos seus conhecimentos (número de dias do ano) e ter respondido "aos 135 tirei 31 do mês de Dezembro". Talvez por uma questão de rotina, Daniel estivesse convencido que perante um problema tinha de operar com os dados que lhe eram fornecidos no enunciado.

Se, após a segunda parte da actividade, tinha ficado a ideia de que resolver problemas era aplicar operações numéricas, essa ideia desapareceu na terceira parte da aula. Ou seja, as formulações realizadas por outros grupos mostraram que os alunos foram capazes de elaborar outros problemas que não os que se resolvem com recurso a operações aritméticas básicas. Foi o caso do proposto pelo grupo do Jonas ou de Mónica. Podendo, por isso, afirmar-se que, nesta aula, para além de os alunos terem aprendido a reconhecer situações onde poderiam usar a multiplicação como adição de parcelas iguais e de divisão como partilha, como no caso do trabalho apresentado pelo grupo em foco; de terem praticado o algoritmo da multiplicação e da divisão e de terem aplicado a tabuada no cálculo desses algoritmos, os alunos aprenderam também a utilizar o calendário como instrumento da vida corrente, leram números superiores aos milhares, leram e escreveram números ordinais, aprenderam a aplicar os múltiplos de um número natural e aprenderam a usar diferentes estratégias em diferentes situações: tabela (do grupo do Jonas), um método próprio (do grupo da Mónica) ou um esquema (do grupo do Júlio) e ainda aprenderam a explicitar e a apresentar por escrito os passos seguidos na tentativa de encontrarem uma solução para um dos problemas criados.

Quanto à comunicação entre os diversos intervenientes na resolução desta tarefa, verificou-se que, mais uma vez, a linguagem oral ocupou um lugar privilegiado na aula de Matemática, em toda a actividade pedagógica. A linguagem escrita foi usada por todos os grupos nas respostas; por dois grupos no resumo das condições do problema a formular; e pelo grupo em foco, a pedido da professora, para explicar como tinham obtido um dado que usaram no cálculo numérico da quantidade de pasta a comprar em 11 meses. Este pedido tinha como intenção levar os alunos a reflectir sobre o dado utilizado, pois ele não era o correcto.

A professora geriu e regulou a sua participação e a dos alunos na aula, encorajando-os a assumir uma responsável e activa participação no processo. Porém, os alunos limitavam-se a olhar o porta-voz de cada grupo com alguma passividade, não se verificando interacções entre os alunos. De um modo geral, os alunos revelaram, mais uma vez, dificuldade em protagonizar o questionamento aos colegas e a discussão dos resultados que cada grupo ia apresentando.

Na segunda e terceira parte da actividade pedagógica, verificou-se que a professora reafirmou o seu papel junto dos alunos do grupo em foco. Desse modo, procurava manter ou construir um ambiente de trabalho produtivo, pois o conflito entre os três alunos e Tomás persistia. Da análise dos dados não se chegou a perceber o que levou estes alunos a terem esse tipo de atitude para com Tomás. Teria sido a pouca clareza da sua expressão oral e a forma pouco afectiva como comunicou que levou os colegas a tomarem uma posição defensiva e pouco afectiva também em relação a ele?

Percebia-se também que a professora pretendia que os alunos a ouvissem e se ouvissem durante as suas exposições. Por isso, evitava perguntas que apelassem a respostas orais colectivas e dirigia-as a um aluno de cada vez.

Da sua interacção com Bela e Sara ficou a ideia de que a professora relacionava esta resolução de problemas com o conceito de multiplicação e divisão. Isto é, procurava estabelecer conexões entre a resolução do problema criado pelos alunos e os seus conhecimentos pessoais acerca da divisão como partilha e da multiplicação vista como produto de factores que traduz uma soma repetida de parcelas iguais; talvez por estar convencida que as alunas tinham dificuldade em compreender esses conceitos.

6. *Tabela de preços*

1.ª parte da actividade: apresentação e introdução do problema pela professora a toda a turma

Para dar início a esta tarefa (ver Quadro 3.2), Ana estabeleceu com os alunos um diálogo sobre férias. Algumas crianças referiram ter já passado férias num parque de campismo e isso serviu para falar sobre o seu funcionamento no que respeita ao pagamento da estadia: os utentes pagam com base numa tabela de preços.

Assim, e observando a tabela de preços que ia distribuindo, a professora solicitava que formulassem um ou mais problemas e resolvessem um deles.

2.ª parte da actividade: formulação e resolução de problemas pelo grupo em foco

Daniel deu inicio à actividade perguntando aos colegas de grupo se "querem inventar um problema". Sara e Bela não se mostraram motivadas para o fazer, enquanto Tomás deixou aberta essa hipótese encolhendo os ombros. Perante a passividade de todos, Daniel propôs ao grupo que formulassem um problema em que a turma toda fosse a um parque de campismo. Essa sugestão foi imediatamente aceite por Sara:

Daniel- Ah! Yá! Podia ir a turma toda a esse parque de campismo!
Bela- Sozinhos?
Daniel- Achas!? Quem é que faz parte desta turma?
Bela- A professora.
Daniel- ...e nós.
Sara- Yá! É fixe!

Tomás parecia não ter compreendido o funcionamento de um parque de campismo ou então, não tinha interpretado bem a tabela de preços de que dispunha, mas Daniel esclareceu-o:

Tomás- Mas aqui diz que só podem ir 4 pessoas!...
Daniel- ... para uma tenda grande.

Sem terem ainda formulado o problema, Sara estimou o número de tendas necessárias, levando Bela a pensar sobre os dados:

Sara- Podíamos alugar até para aí 8 tendas.
Bela- Calma... quantos é que nós somos?
Sara- Vinte?
Bela- ... não. Somos 18! [19]
Sara- Temos de saber quantas tendas temos de alugar.
Bela- Se uma tenda grande leva quatro pessoas, então quantas tendas é que são?

Enquanto isso, e talvez influenciado pela tabela de preços apresentada, Tomás insistia com Daniel em querer levar quatro animais de estimação, parecendo não entender a proposta do colega, que por seu lado não queria contrariá-lo. Os diálogos que manteve com o colega do grupo fazem crer que Tomás estava a desviar-se da formulação que deveriam fazer, divertindo os colegas que estavam muito empenhados na resolução da tarefa.

Para estes alunos, não tinha ficado bem definido o contexto do problema a formular. Apercebendo-se disso, a professora estabeleceu com eles um tipo de interacção assimétrica, procurando assim, saber o que pensavam fazer. Este modo de interagir da professora levou os alunos a clarificarem melhor as suas ideias e a decidirem o contexto do problema a criar.

Ana afastou-se do grupo e Daniel procedeu à contagem dos colegas da turma sob o olhar atento de Sara. Esta, imediatamente após a contagem estimou o número de tendas necessárias para as crianças, mas Daniel conseguiu ser mais eficaz nisso. Os dois procuravam estabelecer um plano para a resolução do problema. Porém, ele não estava formalmente formulado, isto é, não estava ainda registado. Contudo, era evidente que procuravam responder a uma questão que ambos tinham imaginado e que poderia ser, *que quantia irá a turma pagar?*:

Sara- Duas tendas grandes para os rapazes e duas tendas grandes para as raparigas, certo?
Daniel- 3 tendas para rapazes e duas tendas para raparigas. [Fala para Bela] A professora vai dormir com vocês, ham!

Daniel traçava o plano sozinho verbalizando em voz alta os dados que criava para o problema, enquanto Tomás parecia atribuir o estatuto de líder ao colega, colocando a decisão dos dados nas mãos dele:

Tomás- Quem é que fica na nossa tenda, Daniel?
Daniel- Chiu. Quantos automóveis...quantos automóveis...[pensa]. Quatro para cada um [rapazes, raparigas].

Daniel escrevia apenas os dados que ia verbalizando e Ana, observando isso, apelava ao registo escrito de todas as ideias, de modo que colegas e professoras as entendessem:

> Prof.ª- Não se esqueçam de escrever isso que estão a dizer: quem vai, o que leva... se não depois não se sabe! Escrevam todas as vossas decisões.

Daniel mostrava-se empenhado na tarefa e mais uma vez foi ele quem decidiu o que escrever no enunciado do problema, esquecendo-se da questão que pretendiam ver resolvida, deixando para o grupo a decisão do nome do parque de campismo. Porém, percebendo que Bela e Sara não levavam o processo de formulação tão a sério como ele que procurava ajustar o problema o mais possível à realidade, sugeriu aos colegas o nome de um parque, argumentando algumas razões para o escolherem: "podem ir ao parque de campismo do Meco. Olha o Meco tem praia, tem campo de ténis, tem minigolf, tem parque, tem piscina grande e piscina pequena...".

Mas Tomás continuou com a ideia fixa de levar animais. Parecia evidente que chamava a atenção dos colegas, conseguindo distrair Bela de quando em vez. Enquanto isso, Daniel, através de interacções horizontais, tentava convencer os elementos do grupo da verdade das suas ideias, liderando de uma forma autoritária a actividade:

> Daniel- Cala-te!...20, afinal somos 20!.
> Bela- Estás a contar com quem?
> Daniel- Com a professora. Nós somos 19 com a professora: 20.
> Sara- Nós somos 19? Desde quando?
> Daniel- Conta lá. Olha: 1,2,3,...19 [conta um a um todos os alunos da sala, em voz alta].
> Sara- Ah! Pois é!

Tomás insistia na ideia de levar cada vez mais animais. Não parecia ter qualquer intenção de tornar o problema mais complexo, mas antes querer ser "engraçado" para ser aceite no grupo. Então, Daniel solicitou a presença da professora, talvez com a intenção desta se pronunciar sobre a atitude de Tomás, e ele poder prosseguir a resolução.

A professora ficou surpreendida com esta questão. Mas, como desejava que fosse o grupo a ultrapassar esse pequeno conflito, optou por colocar duas questões: uma ao grupo para saber se eles concordavam com essa ideia e outra só a Tomás para saber se ele estava ou não a brincar. Foi Daniel quem respondeu deixando a professora convencida que o grupo concordava com a vontade de Tomás e que essa vontade era séria.

Depois de Ana se ter afastado, Daniel executou o plano de resolução do problema sozinho, enquanto os companheiros brincavam. E, embora anteriormente ele tivesse feito referências a situações da vida real, enquadrando o problema numa realidade que era a sua, depois de efectuados os cálculos, Daniel mostrou-se aliviado por essa ser apenas uma situação imaginária:

> Daniel- [Bela] Sabes quanto nós temos que pagar? 80 euros.
> Sara- Ao todo? Todo, todo, todo?
> Daniel para Sara- 80 euros.
> Daniel- [muito feliz] 80 euros Bela! É 80 euros que não temos que pagar! 80 euros. Um 8 e um zero.

Percebe-se que Daniel é muito popular entre Bela e Sara. Apesar de ser com Bela que ele mais interage, Sara não deixa de lhe dar atenção.

Daniel continuava pensativo enquanto os colegas interagiam de forma pouco produtiva, dizendo graças. Decidiu, então avaliar os resultados a que tinha chegado e que por acaso não estavam correctos, mas sem sucesso.

Entretanto, Ana aproximou-se e, sem questionar, procurou fazer uma leitura silenciosa dos registos de Daniel. Verificando que o problema a que pretendiam dar resposta não estava ainda formulado, a professora questionou o grupo, de modo a conseguirem terminar a formulação do problema. Daniel, sem consultar os outros elementos do grupo, deu a resposta de imediato e registou-a:

> Prof.ª- Mas o que é que vocês querem saber no problema? Ainda não escreveram aqui a questão!
> Daniel- Quanto é que temos que pagar.

Ana afastou-se. Os colegas de grupo fizeram questão de copiar os seus registos e Sara fazia de vez em quando, pequenas observações, desta feita relacionadas com a solução do problema. Daniel não tinha esquecido esse aspecto, mas não lhe dava prioridade:

> Sara- Agora temos de escrever o quê? [Lê pelo Daniel] "Quanto..." [interrompe]. Ó Daniel, mas nós também temos que escrever "todos temos que pagar blá, blá, blá, blá..."
> Daniel- Eu sei! Isso é só depois fazermos a resposta...

Tomás continuava a brincar com Bela, mas quando Ana se juntou ao grupo, Bela fez questão de lhe dizer que não conseguia fazer o problema, enquanto Sara e Tomás se queixavam que Daniel fazia tudo sozinho. Na verdade isso acontecia. Mas parecia até que era porque os três ou não se interessavam pelo problema ou confiavam demais na competência de Daniel em resolver problemas. Ele, por sua vez, desculpava-se dizendo que eles só conversavam. E isso também era verdade. Então, Ana solicitou a Daniel que explicasse tudo o que tinha feito individualmente, tentando assim restabelecer o trabalho colaborativo em grupo:

> Bela- Eu não consigo fazer o problema!
> Sara- Professora, ele [o Daniel] está a fazer sozinho!
> Daniel- Vocês estão a conversar!
> Tomás- Tu não dizes nada!
> Prof.ª- Não, não, agora vais explicar. Vá. Explica lá, o que é que tens aí?

Daniel começou a explicar o seu raciocínio à professora utilizando frases pouco correctas do ponto de vista gramatical. Ana, de um modo assimétrico e alcançando com o seu olhar todo o registo do aluno, corrigiu a sua construção frásica utilizada na formulação da questão:

> Daniel- Aqui pus as tendas. As raparigas alugaram duas tendas, por isso tiveram que pagar 14 euros juntas e a professora.
> Prof.ª- Mas aqui era já para resolver o problema? Ah, já tens a pergunta! [Lê] "quanto dinheiro tinham de pagar?" quanto dinheiro, eu não gosto desta construção frásica! Que dinheiro tinham de pagar ou quanto tinham de pagar...
> [A professora dá tempo para o grupo corrigir.]

Depois, Ana questionou o grupo para os levar a perceber que não tinham especificado quais eram os dados do problema no seu enunciado, nem os tinham explicitado na resolução:

> Prof.ª- Mas quem é que pagava? Afinal quem vai? Eu ainda não percebi quem ia! No problema vocês ainda não disseram quem ia! Era só o 4.º ano A?
> Grupo- Sim...
> Prof.ª- Então eu não ia!
> Tomás- ...e a professora e os meus 6 animais!
> Daniel- Ia!

Tomás insistia em levar os animais de estimação e Ana procurou mostrar-lhe que a visitas de estudo não vão animais de estimação. Parecia que Tomás não iria falar mais nisso.

Ana percebeu que Tomás ficou magoado por ter sido chamado à atenção. Por isso tentou conversar com ele acerca das decisões do grupo:

> Prof.ª- Se vocês concordaram, que iam de visita de estudo, quanto muito, como vão para Sesimbra dormir, podem ir buscar dois, três, ou quatro pais e mães para ajudar a tomar conta da turma com a professora... Tomás, percebeste?

A professora continuou a sua interacção com o grupo interrogando Daniel no sentido de obter explicações acerca dos seus registos. Sara ajudou a clarificar esse pensamento:

> Prof.ª- Então, o que é que tu puseste aqui [Daniel]? "3 raparigas e 2..." raparigas? O que é isto?
> Daniel- 3 rapazes e 2 raparigas.
> Sara- É as tendas.
> Daniel- 3 tendas para rapazes e 2 para raparigas.
> Prof.ª- Ah, contaram os rapazes e as raparigas da turma?

Contudo, sempre que achava que esses registos estavam incompletos por falta de dados e de uma certa clarificação das ideias, Ana procurava também dar sugestões aos alunos, orientando-os na formulação e resolução do problema criado, incentivando o diálogo entre eles, embora nem sempre fosse fácil para ela encontrar um limite para as orientações a dar:

> Prof.ª- Mas não está aqui explicado! Aqui em baixo vocês deviam pôr quantos rapazes tem a turma, quantas raparigas tem. Eu estou a perceber o que querem dizer, mas eles [Bela e Tomás] não! [Olha para todos e continua] Ora vocês aqui em baixo vão pôr primeiro quem vai. Quais são as raparigas, quais são os rapazes, quais são os adultos... Se vão homens, se vão mulheres... Porque os homens não vão dormir com as mulheres, nem as raparigas com os rapazes na mesma tenda. Vá, conversem entre vocês.

Foi curioso observar o comportamento de Daniel. Logo que a professora se afastou, ele dirigiu-se aos colegas com a intenção de lhes pedir que não manifestassem as suas dúvidas à professora para não terem que acrescentar mais nada aos seus registos. Mas talvez por não o terem entendido, não encontrou aceitação. É evidente que Daniel tentou manipular os colegas por não querer ter trabalho acrescido, uma vez que ele percebia o que tinha registado.

Como aconteceu nas sessões anteriores, os alunos, mais uma vez, discutiram as classificações das fichas de cada um e sobre quem era o "mais esperto". A autoconfiança de Daniel em relação à sua competência matemática é grande. Ele continuou a registar as suas ideias sem as partilhar com os colegas.

Sara resolveu escrever "raparigas 7 – 2 tendas" e pôs isso em comum com Bela e Tomás. Mas, ao comparar o seu registo com o de Daniel, estranhou o número de raparigas (8) registado por ele. Então, interagiu com o colega, questionando-o para ultrapassar dúvidas e, consequentemente, para uma melhor compreensão do processo. Mas, não conseguiu obter resposta, pois numa atitude individualista ele não verbalizou o seu raciocínio:

> Sara- 8?! Agora são 8 raparigas?! Elas são 7. Ó Daniel, não conta com a professora. A professora não é rapariga, é adulta!
> Daniel- Sim, uma adulta.
> Sara- Então porque é que está aqui 8, se somos 7?
> [Daniel fez uma expressão de quem não vê dificuldade e não responde.]

Depois de Bela se queixar que ele não estava a desenvolver um trabalho colaborativo com o grupo, Daniel lembrou Tomás do seu egocentrismo na resolução da tarefa *Higiene Dentária*, como se isso fosse razão para o seu comportamento. Bela e Sara desculpam-se dizendo que não lhe fizeram nada e, por isso, Daniel resolveu explicar o seu plano a Bela. Porém, não foi muito explícito, nessa sua verbalização, deixando a colega pouco esclarecida e a pedir-lhe para repetir.

Enquanto a professora se reaproximava do grupo, Daniel repetia a Bela o seu plano, com mais pormenor. Mas, tanto a verbalização do raciocínio como a forma como estava organizado no papel não era de fácil compreensão nem para ela nem para Tomás:

> Daniel- Já fiz quantas raparigas são. Tem uma adulta que é a professora... vocês são 7 crianças e 12 crianças que somos nós...
> Tomás- Eu não percebi nada.
> Bela- Nem eu.

Ana, ao observar Daniel com atenção, resolveu ler os seus registos em voz alta, fazendo a verificação dos passos já efectuados, mas primeiro, colocou uma série de questões seguidas com a intenção de focalizar os alunos e de os fazer reflectir sobre as respostas ou de os levar a corrigir algum dado:

> Prof.ª- Vamos lá a ver se eles perceberam bem assim: [interpreta o que lê] 8 raparigas precisam de duas tendas. 1 adulto... onde é que o adulto vai dormir [Daniel]?
> Daniel- Numa das duas tendas.
> Prof.ª- Então... mas as tendas levam quantas pessoas?
> Daniel- 4.

Prof.ª- Então, se são 8 raparigas, 4 e 4...
Sara- 8 a contar com a professora!

Os quatro alunos acompanhavam a professora. Ana revelava ainda uma grande preocupação com Tomás e Bela por estes terem dito que não percebiam o raciocínio do colega. Por isso, dava-lhes tempo para fazerem os seus registos:

Prof.ª- Portanto, são 7 moças e uma mulher. Agora já está bem. Pronto, agora os rapazes. Vamos ver se a gente percebe. Vejam lá se percebem [Bela e Tomás], estão preparados? Então Daniel, lê lá os rapazes. Vejam lá se percebem isto.

Depois, verificou e validou os passos da resolução efectuados por Daniel, com muito cuidado para não haver falhas, confirmando cada passo do seu raciocínio:

Daniel- Rapazes são 12.
Prof.ª- São 12 rapazes?
Daniel- Sim.
Prof.ª- Contaram-nos?
Daniel- Sim. São precisas 3 tendas para eles.
Prof.ª- Grandes ou pequenas?
Daniel- Grandes.
Prof.ª- Então aqui [nas raparigas] também não puseste que eram grandes, tens de escrever aqui: duas tendas grandes. E à frente é que pões: 1 adulto.

Ana deixou depois que os alunos monitorizassem a verificação dos passos da resolução, afastando-se um pouco. Contudo, eles solicitaram de imediato a sua opinião em vez de decidirem em grupo o que fazer. Parecia que apenas desenvolviam trabalho depois de a professora validar as suas respostas, caso contrário era difícil para eles tomarem a iniciativa:

Sara- E o adulto para os rapazes, professora?
Prof.ª- E um adulto... À frente...
[Ana afasta-se]
Tomás- O meu pai pode ir...
Bela- Professora, os pais podem ir?!...
[Ana aproxima-se]
Prof.ª- Claro que os pais podem ir....

Talvez por estar pouco habituado a lidar com as frustrações, uma vez que é ele quem tem os melhores resultados nesta área disciplinar, Daniel teve dificuldade em aceitar outras contribuições para o trabalho. Por isso, colocou novamente a questão da explicação (comunicação) do trabalho desenvolvido em grupo à turma, recusando-se a fazê-lo. Nenhum dos outros elementos queria apresentar o trabalho:

Daniel- Satisfeitos? Olha que não sou eu que vou explicar.
Bela- É o Tomás!
Tomás- Eu? Ele é que sabe tudo, eu não percebo nada!
Daniel- Já fui 3, 4 vezes, a Bela é que só foi uma.

Então Ana, para os tranquilizar, e não querendo que essa preocupação obstruísse a resolução de problemas, disse que o faria ela. Todos sorriram aliviados.

A professora procurou focalizar os alunos na resolução do problema através de perguntas que os ajudavam a terminar a tarefa. Mas, enquanto Tomás quase não participava na actividade, Daniel ficou mais descontraído e também mais participativo:

Prof.ª- Olhem, e nessas 3 tendas cabem todos a dormir?
Daniel- Assim, temos de pôr mais uma tenda pequena.
Prof.ª- Uma tenda pequena para o pai do Tomás?
Sara- É assim: 3 tendas grandes e ao lado uma tenda pequena.

Ana afastou-se. Os alunos avançaram mais um pouco na execução do seu plano de resolução. Daniel ia registando essa execução, porém, havia cálculos que fazia mentalmente e registava apenas o resultado que ficava a aguardar verificação. Era notório que Daniel continuava a ser o líder do grupo:

Daniel- Agora vão precisar de 4... não, 3 carros alugados. O teu pai vai levar o vosso. 3 carros... dá 5 carros ao todo. Dá 5 euros...
Bela- 5 quê?
Daniel- Euros. Escreve aí. Depois junta mais 30... (queriam interrompê-lo, mas ele continua) espera aí... mais 6, mais...36 [38] e...mais nada.
Bela- Agora é só somar isto tudo!?
Daniel- Sim!

Ana sabia que os alunos não tinham ainda definido o tempo de duração da visita, então resolveu colocar essa questão ao grupo, talvez por pensar que estes alunos seriam capazes de resolver problemas mais difíceis. Quando chegaram a um acordo, a professora alertou para a necessidade de fazer esse registo. Todos deram ideias, mas a decisão coube a Daniel. Pensando sobre o assunto, verbalizou o seu raciocínio usando frases muito curtas e estabeleceu e executou esse plano, de imediato:

Prof.ª- Quanto tempo vão ficar?
Tomás- 1 dia.
Sara- 1 semana...
Bela- Também acho!
Daniel- Uma semana.
Prof.ª- Não se esqueçam de registar o tempo que vão lá passar.
Daniel- Bela, isso vezes 7.

> Bela- A mim deu-me 77.
> Daniel- 77 vezes 7.

Nesse momento, Tomás também verbalizou os procedimentos a ter:

> Tomás- Já sei quanto é que dá. Já sei o que é que temos de fazer: temos que somar o dinheiro que gastamos numa semana e depois multiplicar.

Daniel tinha pedido a Bela que efectuasse as operações aritméticas para chegar ao resultado final, desejando que ela fosse rápida e eficaz nos procedimentos. Mas, quando a ouviu verbalizar de novo os factores, ele mesmo o fez. Parecia assim demonstrar pouca confiança nos procedimentos de Bela:

> Daniel- Vá [Bela], faz a conta. Essa conta, despacha-te!
> Bela- Não sou nada boa a fazer contas...(sorri)
> Daniel- Ai, ai, quanto é que deu?...
> Bela- 77 vezes 7?...
> Daniel- 77... Espera aí. Primeiro deixa-me fazer a conta.

Ao usar o algoritmo, Daniel mostrou-se surpreendido com o resultado final, julgando-o exagerado. Possivelmente por não ter conseguido estabelecer a relação entre este e o contexto do problema ou por não ser usual lidar com estas situações em que surgem grandes quantias em dinheiro, ou ainda por comparação com o ordenado familiar. Bela mostrou-se igualmente incrédula com o resultado:

> Daniel- Ai meu Deus!
> Sara- Que é que foi?
> Daniel- 539 euros... nós vamos ter de pagar! (põe as mãos na cabeça) Isto é bué!
> Bela- *Tás* a gozar!
> Daniel- A sério!, não *tou* a gozar nada!

Bela tinha efectuado o algoritmo da adição e agora duvidava do seu resultado e não do resultado do algoritmo da multiplicação efectuado por Daniel. Isto evidencia, por um lado, alguma falta de confiança em si mesma e o reconhecimento da capacidade e competência matemática de Daniel, e por outro, a ausência do estabelecimento da relação entre o contexto do problema e o resultado obtido. No entanto, Sara duvidava antes da competência algorítmica de Daniel, pois outras vezes tinha verificado que ele não memorizara a tabuada, fazendo questão de verificar o resultado de "539 euros" obtido por ele, voltando a repetir a técnica, em voz alta. Ao longo dos trabalhos, Sara sempre se preocupou muito com os algoritmos, recorrendo pouco ao cálculo mental:

Bela- Então, não podes ter gasto 77.
Daniel- Hã?
Sara- Eu vou ver se isso é verdade!
Daniel- *Tá* bem.
Sara- 7 vezes 7, 49 e vão 4; 49, 49... 50, 51, 52, 53. Yá, é verdade!
[Daniel sorri e olha Bela com ar vitorioso.]

Enquanto Bela se mostrava céptica em relação à estratégia utilizada, Sara não duvidava dela nem da certeza da tabuada, para ela tudo estava mais do que certo:

Bela- Não quer dizer que as nossas contas estejam certas!
Sara- Bela...mas toda a gente sabe que 7 vezes 7 são 49!
Bela- Siiimmm...

Daniel tinha criado este problema para resolverem e conseguia também criar extensões para ele. Contudo a sua capacidade para encontrar um valor aproximado para o resultado de uma divisão ainda não está muito desenvolvida. Isto pode ser reflexo de pouca prática de aulas em que estes aspectos são valorizados:

Daniel- 539 euros é quanto eles vão ter que pagar. Nós todos. Não, mas é ao todo hã?
Bela- *Tás* a gozar?! Tanto dinheiro! Puxa, aquilo é *muita* caro!
Daniel- É verdade. Cada um vai ter que levar 50 ou mais euros.

Daniel mostrava-se descontraído. E, quando Ana se aproximou do grupo e ainda antes de qualquer questão ou comentário seu, fez questão de lhe mostrar os progressos que tinham feito e o resultado a que tinham chegado, esperando uma reacção de Ana. A reacção da professora não foi a que esperavam, certamente. É que a professora tinha detectado um erro e ia querer saber como tinham eles obtido o resultado:

Daniel- Professora acabámos. Sabe quanto é que temos que pagar por uma semana? 539 euros.
Prof.ª- Por uma semana... mas eu quero saber o que é isto: 36. O que é isto [Bela]?

Ana observava nos registos de Bela a seguinte representação de dois algoritmos, sem mais explicações:

36+30+6+5= 77

$$\begin{array}{r} 36 \\ 30 \\ 6 \\ \underline{+5} \\ 77 \end{array}$$

77x7= 539

$$\begin{array}{r} 77 \\ \underline{x7} \\ 539 \end{array}$$

Então, quis saber a que correspondia cada uma dessas representações. Para isso, estabeleceu um diálogo através de pergunta-resposta, partindo a pergunta sempre dela para o grupo. Assim iniciavam a verificação dos passos do problema. Porém, quem verbalizava a correcção do cálculo era apenas Daniel:

Daniel- 36... é as crianças.
Prof.ª- Quantas crianças são?
Daniel- São 18.
Prof.ª- 18?! 12 mais 7 raparigas?
Daniel- Ah, não. 19.

A professora verificava com o grupo esse resultado, continuando depois a orientar os seus pensamentos. Os alunos percebiam assim que construíam a resposta certa a partir da errada. Percebia-se que Daniel tinha bom cálculo mental, aplicando a propriedade comutativa da multiplicação ou transformando esta numa adição de parcelas iguais:

Prof.ª- 19 vezes ...2. Quanto é que é 19 vezes 2?
Daniel- 19 vezes...
Prof.ª- 2.
Daniel- 2? 38.
Prof.ª- 38...

Tomás mostrava uma atitude bastante serena, sem se preocupar em corrigir os seus registos, ao contrário de Sara:

Sara- Então isto aqui é 38?
Prof.ª- Aqui é 38, não é 36.

Sara e Daniel supunham que a quantia a pagar pela turma iria aumentar, mas Bela não, pensava que talvez pudesse diminuir. Então, Daniel verbalizou o seu raciocínio mostrando-lhe que aumentando uma das parcelas, o total aumentava também. Os alunos corrigiam então os dados:

Sara- Bem, preparem-se que o pagamento vai mudar!
Bela- Às tantas... eu sabia que era impossível!
Daniel- Não, vai dar mais! Vai dar mais 2...79 aqui.

Continuando a verificação dos passos da resolução do problema, Ana alertou os alunos que deveriam explicitar como obtiveram as quantias que somaram, fazendo uma legenda para se poder ler. Pois, mesmo Daniel, que tinha sido o autor da estratégia, tinha algumas dúvidas:

Prof.ª- Olha, mas é assim, vocês têm de fazer uma legenda para isto! Têm de pôr assim... 38 euros- crianças. Agora o que é o 30? Expliquem-me lá o que é o 30.
Sara- Também não sei. Que é que é [Daniel]?
Daniel- Espera aí! ...O 30 é as tendas.

Muitas vezes, as questões colocadas aos alunos pediam apenas uma resposta curta ou o seu completamento. Mesmo assim, Daniel parecia ser o único capaz de responder:

Prof.ª- Que tendas?
Daniel- Tendas grandes.
Prof.ª- Quantas tendas grandes foram?
Daniel- 5. E uma pequena.
Prof.ª- Foram 5 tendas grandes. Então, é 5 vezes...
Daniel- ...6, dá 30.

Ana continuava a verificar os passos da resolução questionando os alunos. Depois, repetia para que pudessem reflectir sobre o processo e corrigir os seus registos, corrigindo a construção frásica se fosse caso disso:

Prof.ª- Agora o que é o 6?
Daniel- 6 euros é por os dois adultos.
Prof.ª- Ah, então 6 euros por dois adultos. Agora o que é 5?
Daniel- É os automóveis.
Prof.ª- São os automóveis, muito bem.

Observando que os alunos não tinham registado um dos dados: uma tenda pequena, Ana levou-os a descobrir o que faltava e a corrigir esse erro, para dar resposta ao problema:

Prof.ª- E não vos falta nada?
Daniel- Não...
Prof.ª- Têm a certeza?
Sara- Falta a tenda pequena!
Prof.ª- [Acenando afirmativamente a cabeça] Falta a tenda pequena, diz aqui a Sara e muito bem. Falta a tenda pequena.

O diálogo continuou, uma vez que faltava incluir no orçamento o preço da tenda pequena por uma semana. Daniel verbalizava todo o seu raciocínio necessário para completar o trabalho:

Sara- Esquecemo-nos de quanto custa a tenda pequena.
Daniel- 5 euros a tenda pequena.
Sara- Então aqui [na legenda] falta-nos mais o 5.
Prof.ª- Por dia... falta o preço da tenda pequena: 5 euros, por dia...
Daniel- Ah, yá! 7 vezes 5... trinta e cinco. 35 numa semana.

As correcções pareciam estar concluídas e Ana afastou-se. Tomás começou a copiar os registos de Daniel que, por sua vez, continuava a liderar a resolução da tarefa verbalizando o seu pensamento "agora...7 vezes 79...". Deste modo, Daniel e Sara interagiam igualitariamente já que ele verbalizava o procedimento algorítmico e Sara o efectuava. O algoritmo foi feito individualmente e Sara, evidenciando saber a tabuada, precisamente o contrário do que dissera na entrevista, foi a primeira a verbalizar o resultado:

> Sara- 553. É mais ou não, Bela?
> Daniel- 553 também. Agora, para não se apagar nada, põe-se o 35 aqui [escreve 35 debaixo de 553].
> Sara- ham ...ham ...

Sara acompanhava a explicitação de Daniel, corrigia os registos da sua folha e concordava com ele. Bela apenas fazia as alterações necessárias e Tomás continuava a copiar pela folha do colega.

Tinham decorrido noventa minutos desde o início da actividade quando Ana se aproximou novamente. Ela evidenciava alguma pressa para que os alunos escrevessem a resposta. Sara procurou imediatamente validar a solução encontrada, enquanto Daniel avaliava o resultado, achando-o desadequado às capacidades económicas dos alunos da turma. No entanto, ele estava enganado quanto à estimativa computacional realizada:

> Sara- É assim professora: 588. Afinal subiu mais.
> Prof.ª- 588 euros. Dêem a resposta, dêem a resposta.
> Daniel- Ainda bem que nós não fomos a uma visita destas. Senão tínhamos de levar mais de 50 euros para lá.

Ana observava cuidadosamente Tomás e Bela. A professora revelava muito cuidado com as dificuldades de cada aluno. Parecia conhecer os pontos fortes e os pontos fracos de cada um e, por isso, ia incentivando o seu trabalho.

Daniel terminou de escrever a resposta e leu-a em voz alta para dar a possibilidade aos colegas de a escreverem tal qual ele registara: "tínhamos de pagar 588 euros numa semana... (depois apagou "numa semana")"

Depois de terminarem, os alunos, com excepção de Tomás, avisaram a professora e comentaram o seu desempenho mostrando-se mais confiantes nas suas capacidades.

3.ª parte da actividade: comunicação à turma dos problemas matemáticos criados e dos caminhos/estratégias encontrados(as) por cada grupo para o(s) resolver

Para apresentarem à turma os problemas criados bem como as estratégias encontradas para os resolver, os grupos serviram-se da projecção de acetatos. Cada porta-voz fez a sua apresentação, com excepção do primeiro grupo que, por ter uma resolução demasiado extensa, foi apresentado por todos os elementos.

Mónica foi a porta-voz do seu grupo. Para iniciar a apresentação do trabalho, a professora começou por lhe pedir que falasse do problema que tinham criado (ver Figura 27).

Resumindo o enunciado do problema, Mónica verbalizou de forma rápida, mas que se percebeu muito bem:

> Mónica- Nós vamos com as nossas famílias ao parque de campismo. Vamos ficar lá 5 semanas.
> Prof.ª- E o que querem saber?
> Mónica- Quanto é que as nossas famílias vão gastar.

Preços por dia	
Tenda grande (4 pessoas)	6 euros
Tenda pequena (2 pessoas)	5 euros
Adulto	3 euros
Criança (menos de 12 anos)	2 euros
Automóvel	1 euro
Animal de estimação	1 euro

Somos 5 famílias e vamos para o parque de campismo 5 semanas
Na família da ...... vão 2 pessoas a avó e a ......
Na família da ...... vão 6 pessoas, o avô o irmão os Pais e os gatos.
Na família do ...... vão 10 pessoas, os Pais, os irmãos, o avô os tios e os primos.
Da minha vão 4 pessoas, a minha mãe, a minha prima a minha sobrinha e eu.
Na família da ...... vão 4 pessoas, os Pais a irmã e a avó.

Mostrem como poderiam encontrar a solução para um dos problemas matemáticos que criaram.

Quanto dinheiro gasteu cada família?

Figura 27 – Formulação de um problema efectuada pelo grupo de Mónica, a partir da *Tabela de Preços*.

O grupo apresentou um esquema em árvore como estratégia de resolução para o seu problema e que serviu de base à verbalização dos alunos (ver Figura 28).

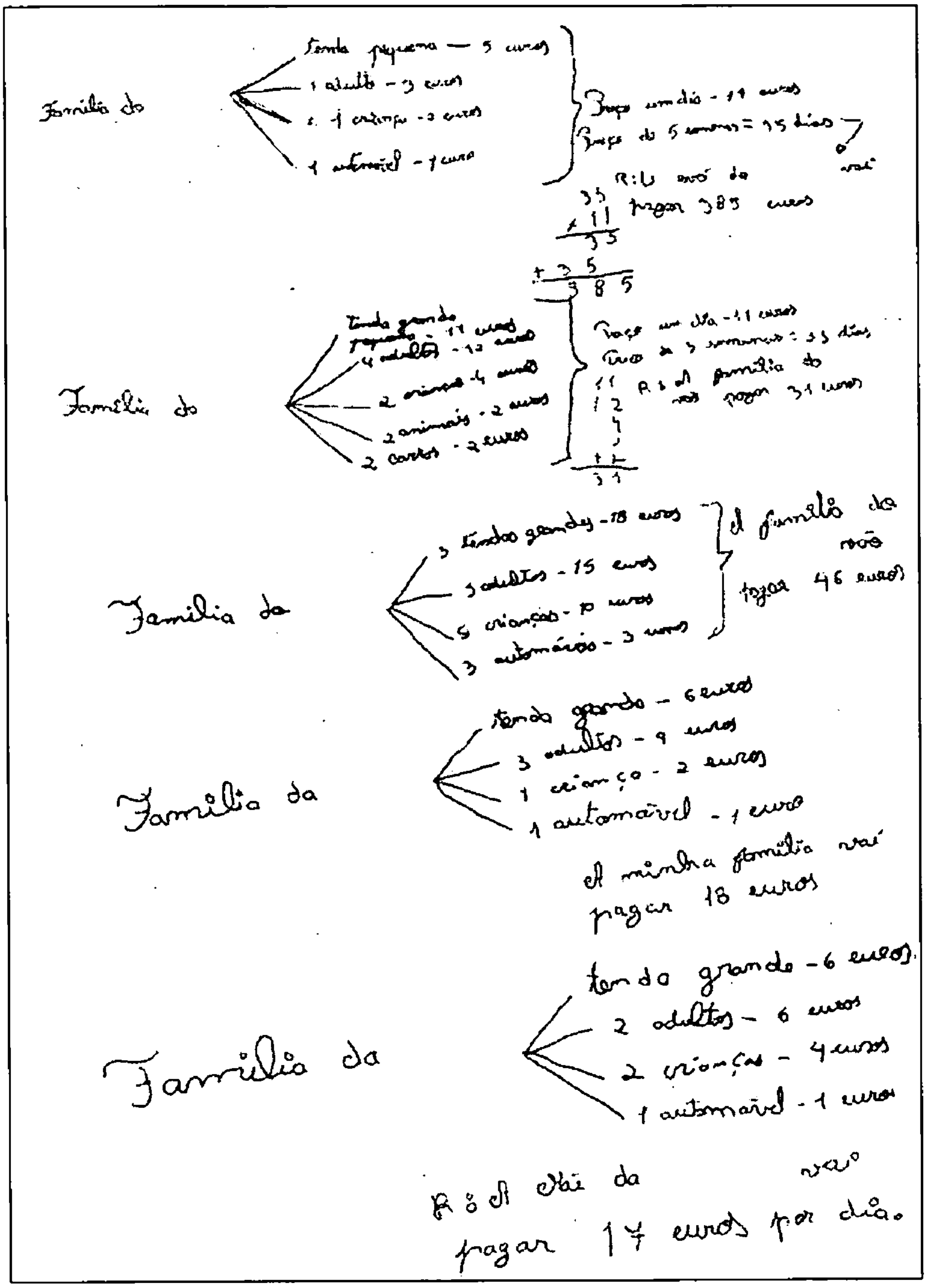


Figura 28 – Estratégia utilizada pelo grupo de Mónica para resolver o problema matemático que criou.

Mónica começou então a explicitar como tinham procedido para cada uma das famílias. Mas, a determinada altura um dos colegas de grupo interveio avaliando os resultados:

> Mónica- Escrevemos a família do Flávio, a família do Pedro, a família do Dario, a minha família e a família da Sandra. Depois começámos a ver quantas tendas é que era preciso e o preço; quantos adultos é que eram e quantas crianças e quantos automóveis, depois eram 5 semanas, as férias, e o preço de um dia era 11 euros e o preço das 5 semanas era igual a 35 dias, então o avô do Flávio ia pagar 385 euros por 35 dias, 11 euros por dia. Depois a família do Pedro: fizemos quantas tendas é que eram, o preço, quantos adultos, quantas crianças e dois gatos e dois carros. Fizemos o preço do dia e a família do Pedro vai pagar 31 euros por 35...
> Flávio- Não. É 1085. Falta a conta de vezes.

Ana procurou desculpá-la frente à turma dizendo que Mónica tinha estado ocupada a passar o seu trabalho a caneta para poder ser fotocopiado.

Coube depois a Flávio a continuação da explicitação. Mas como afirmava que não sabia, a professora apoiou-o passo por passo na leitura do esquema:

> Prof.ª- Então!? Cada um escolheu a sua família e em função da família que tinham precisavam aqui [na família do Dario] de 3 tendas grandes, não é Flávio?
> Flávio- Sim.
> Prof.ª- Iam...
> Flávio- 5 adultos, 4 crianças e 3 automóveis.
> Prof.ª- Portanto eles num dia iam pagar...
> Flávio e Prof.ª- 46 euros.

Flávio tinha compreendido a resolução do problema. Talvez o facto de ter dito "não sei explicar" quisesse dizer falta de confiança em si, vergonha de se expor ou simplesmente a dependência de uma prática usual na sala de aula, em que o aluno apenas tem que terminar a frase iniciada pela professora.

De seguida, foi a vez de Sandra explicar os cálculos que correspondiam à família de Mónica. Sandra também mostrou ter percebido o raciocínio utilizado, pois rapidamente o verbalizou, verificando que lhes faltava efectuar a multiplicação. Pelo diálogo que se estabeleu entre Ana e a aluna pôde perceber-se também uma certa compreensão e valorização do trabalho dos alunos:

> Sandra- A família da Mónica precisava de uma tenda grande que custava 6 euros; eram 3 adultos uma criança e um automóvel.
> Prof.ª- E aqui tu escreveste...
> Sandra- A família da Mónica vai pagar 18 euros... Agora ela esqueceu-se de fazer a conta de vezes.

Prof.ª- Já não houve tempo para concluir o raciocínio. Reparem [todos] que este problema foi muito trabalhoso porque tinha muitos meninos... e cada um levava a sua família, estão a perceber?

Seguiu-se a explicação de Pedro acerca de quanto deveria pagar a família de Sandra. Mas este aluno, que só tinha colaborado com o grupo na fase da criação do enunciado do problema e no estabelecimento do plano, tendo-se recusado a executá-lo alegando que os colegas não esperavam por ele, afirmava, nesse momento não saber. Então, Ana encorajou-o a explicar à turma que dados usaram nos cálculos para família de Sandra, permitindo a ajuda desta para ser mais preciso:

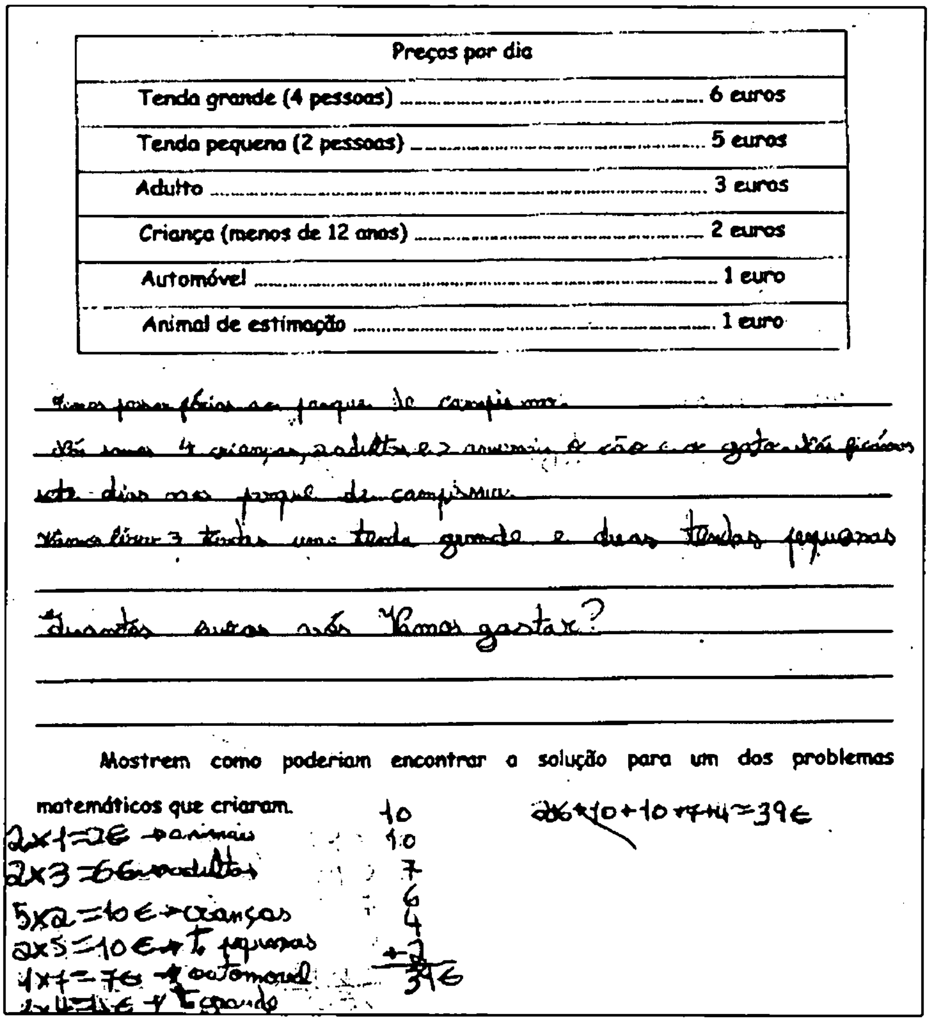
Prof.ª- Sabes pois! A família da Sandra... o que é que ela levou?
Pedro- Levou...tenda grande.
Sandra- Uma!
Pedro- Uma tenda grande, iam dois adultos, duas crianças e um automóvel.
Prof.ª- Juntaram isto tudo e iam...
Pedro- ... pagar 17 euros... por dia.

Por fim, Ana deu a oportunidade a todos os alunos de se expressarem perguntado "o que é que acharam" e se queriam "fazer perguntas". E, como os alunos não avançaram com nenhuma questão ou comentário, evidenciando uma certa falta de iniciativa e de avaliação dos resultados, a professora fê-lo. Foi interessante perceber como é que o grupo tinha tomado uma decisão tão consensual:

Prof.ª- Como é que decidiram que famílias iam aqui pôr? Que história foi a vossa para formular o problema?
Mónica- A gente primeiro resolveu inventar as famílias, mas depois o Flávio deu uma ideia e a Sandra [também], que foi fazermos das nossas famílias, e a gente resolveu fazê-las.
Prof.ª- Sim senhora, foi um bonita ideia. Posso passar à próxima?

O grupo que se seguiu criou um problema semelhante ao do grupo anterior, mas mais simples, só com uma família, ou seja, os passos dados para chegarem à solução eram em menor número. Como se poderá ver adiante o grupo não terminou o raciocínio que o levava a encontrar a resposta para o problema formulado.

Mara, a porta-voz, começou por fazer a leitura do enunciado do problema criado pelo seu grupo (ver Figura 29).



Preços por dia	
Tenda grande (4 pessoas)	6 euros
Tenda pequena (2 pessoas)	5 euros
Adulto	3 euros
Criança (menos de 12 anos)	2 euros
Automóvel	1 euro
Animal de estimação	1 euro

Vamos passar férias ao parque de campismo.
Nós somos 4 crianças, 2 adultos e 2 animais, o cão e o gato. Vão ficar sete dias no parque de campismo.
Vamos levar 3 tendas uma tenda grande e duas tendas pequenas
Quantos euros nós vamos gastar?

Mostrem como poderiam encontrar a solução para um dos problemas matemáticos que criaram.

2x1=2€ → animais
2x3=6€ → adultos
5x2=10€ → crianças
2x5=10€ → T. pequenas
1x7=7€ → automóvel
1x4=4€ → T grande

10
10
7
6
4
+2
39€

2+6+10+10+7+4=39€

Figura 29 – Formulação e resolução do problema efectuadas pelo grupo de Mara.

Depois, iniciou a explicitação da forma como resolveram o problema revelando ter-se envolvido nesse processo:

> Mara- Começámos por ir à tabela ver os preços por dia e multiplicámos 2 vezes 1...2. Eram dois animais. E cada animal era um euro.
> Prof.ª- Portanto eles iam gastar 2 euros nos animais. Estão a perceber?
> Mara- Depois 2 vezes 3... 6, eram dois adultos.

Ao mesmo tempo, a professora tentava atrair a atenção da turma, mas os alunos mantinham alguma passividade enquanto os grupos apresentavam as suas resoluções. E, quando surgia uma pergunta para o colectivo, acenavam a cabeça ou verbalizavam um sim ou um não muito isolado.

Porém, a certa altura, a representação simbólica utilizada para resolver o problema deixou de fazer sentido e Mara não conseguiu entender o que tinha feito. Ana ajudou-a pensando alto:

> Mara- Depois era 4x4... (corrigiu) 4x7... Não!
> Prof.ª- O automóvel era um euro...o automóvel vezes sete... Ela enganou-se, espera... Então, o automóvel era um euro, se eles levavam um automóvel...
> Mara- Não professora, era um euro vezes sete.
> Prof.ª- Uma vez sete? Ora deixa ver, a tenda grande está bem [não está]. A tenda grande e a tenda pequena. Este um é um animal de estimação, não é?
> Mara- Sim professora.

Foi precisamente Mara que conseguiu encontrar o significado da expressão numérica "1x7" na sequência da intervenção do Manuel e da professora. Ana questionava os alunos e todos se empenhavam na procura de uma explicação:

> Manuel- São sete pessoas.
> Prof.ª- Sim, sete pessoas... mas o que está lá são sete euros. O que é que poderá ter acontecido?
> Mara- Professora, nós íamos meter 1x7 que dava sete, porque eram sete dias que nós íamos lá passar e pagávamos 1 euro [por dia].

Depois daqueles momentos de procura de sentido para o trabalho realizado, Ana explicou o que tinha acontecido e continuou o raciocínio iniciado pelo grupo para obterem a resposta ao problema formulado:

> Prof.ª- Ah! Pois é, a Mara tem razão! Mas, repara que assim só o automóvel é que pagou sete dias! Esqueceram-se de pôr os animais, 7 dias: 7 vezes; os adultos 7 vezes; as crianças 7 vezes; a tenda pequena e a tenda grande 7 vezes.

Entretanto, Sandra levantava a mão e pretendia esclarecer uma dúvida. Parecia que a avaliação do resultado anterior tinha provocado a vontade de os alunos interagirem. Ana incentivou a interacção entre os dois alunos ao remeter a resposta para o grupo:

> Sandra- O que é isso? [apontando para o algoritmo da adição]
> Prof.ª- Ó Manuel, explica lá à Sandra o que quer dizer esse algoritmo.
> Manuel- É o resultado que nos deu em tudo o que nós pagámos...
> Prof.ª- Olha, estás a ver aqui os cálculos: 10 euros, 10 euros, 7 euros, 6 euros, 4 euros e 2 euros. O total seria a quantia que deveriam pagar por dia. Estás a perceber?

A professora explicou, ainda, que "só lhes faltou multiplicar pelo número de dias que eles iam lá estar, excepto o automóvel porque o automóvel já tinha sido contado". Ana reforçou que o trabalho não estava completo e que "da próxima vez deveriam verificar se tinham tudo de acordo com o que pensaram no problema", isto é, com as condições e com a pergunta que criaram.

Seguidamente, foi Márcia que falou do trabalho do seu grupo. A professora apoiou bastante a aluna na explicação da estratégia utilizada por eles: um quadro com os dados e os cálculos organizados (ver Figura 30 e 31).

Preços por dia	
Tenda grande (4 pessoas)	6 euros
Tenda pequena (2 pessoas)	5 euros
Adulto	3 euros
Criança (menos de 12 anos)	2 euros
Automóvel	1 euro
Animal de estimação	1 euro

Uma família ia para o parque de campismo saíram de casa numa sexta de manhã.
Iam no Porto chegaram. Lá pagaram, iam 2 adultos, 3 crianças, 2 automóveis um gato e um cão e 1 tenda grande e 1 tenda pequena. Eles iam ficar lá um mês.
Quanto vão pagar pelas Férias de Verão?

Figura 30 – Formulação de um problema efectuada pelo grupo de Márcia.

Márcia parecia não conseguir expor o seu raciocínio à turma sem que a professora orientasse o seu pensamento. Ela lia apenas o que estava escrito e que eram afinal parte dos dados do problema:

> Prof.ª- "O que vai?"
> Márcia- Uma tenda grande; uma tenda pequena; 2 adultos; 3 crianças; 2 automóveis; 2 animais de estimação.

Na segunda parte do quadro estava a seguinte representação:

Total do mês de Agosto

31x6=186
31x5=155
31x6=186
31x6=186
31x2= 62
31x2= 62

Então, os alunos foram questionados no sentido de se saber se estavam a perceber o que viam. Só Manuel, que habitualmente é atento e participativo disse "eu não estou muito bem!".

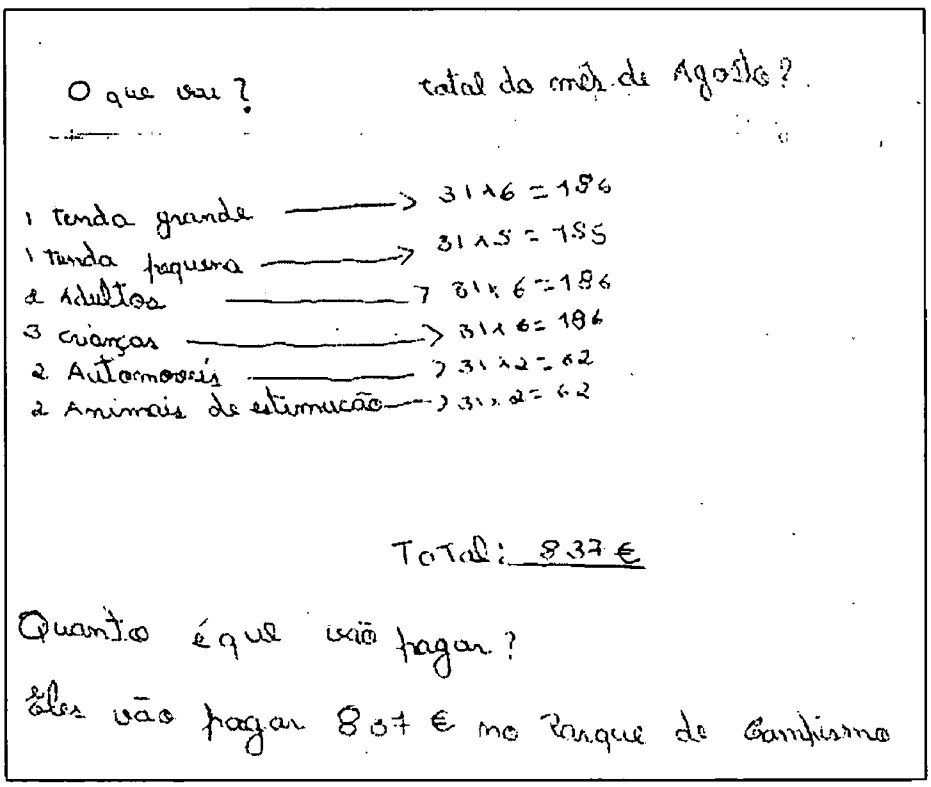


Figura 31 – Estratégia utilizada pelo grupo de Márcia para resolver o problema matemático que criou.

Foi Júlio, elemento do grupo de Márcia, que tentou explicar ao colega o significado da expressão "total do mês de Agosto". O aluno mostrou-se confuso na sua verbalização:

Júlio- É o que eles pagaram em Agosto... no mês de Agosto.
Prof.ª- Agora isto aqui [31x6=186]

Júlio- 31 vezes 6...[lendo]
Prof.ª- Mas o que é o 31?
Júlio- É da tenda grande.

Mara estava atenta ao diálogo e mais uma vez surpreendeu a professora. Contudo, usou expressões curtas para verbalizar os seus pensamentos o que por si só não ajudou a esclarecer os outros, tendo a professora de clarificar as suas afirmações para que todos entendessem:

Mara- Eu já sei!
Prof.ª- Olha, a Mara já entendeu, e não é do grupo! O que é o 31?
Mara- É do mês.
Prof.ª- São os dias do mês de...
Mara e Prof.ª - ...Agosto!
Prof.ª- 31 vezes 6, porque a tenda grande é 6 euros por dia. Quanto é que eles iam pagar pela tenda grande?
Mara- 186 euros.

Júlio deveria ter explicado o restante procedimento, mas, tal como Márcia, leu apenas os registos, acabando por não conseguir fazê-lo. Talvez Júlio não tivesse compreendido a estratégia usada por não terem registado todos os passos dados, nem em linguagem simbólica nem em linguagem natural:

Prof.ª- Júlio, os teus colegas querem saber o que é este 31, o que é este 6; o que é este 31, o que é este 2... Isso tu ainda não explicaste! O que é isto [31]?
Júlio- ...

Coube, de novo, a Mara explicar o significado da expressão numérica apresentada e ela voltou a responder "são os dias do mês". Mas, à pergunta da professora "e este 6?" foi Jacira, do grupo de Márcia e Júlio que respondeu rapidamente "é o preço de dois adultos que deu 6", mostrando que tinha estado envolvida na resolução.

Depois desta clarificação inicial, os alunos entenderam o que estava escrito no quadro da resolução do problema do grupo de Márcia e respondiam com facilidade ao que a professora perguntava. Jacira, do mesmo grupo, também quis mostrar que tinha entendido:

Prof.ª- E aqui [o outro 6] é o preço de quê?
Mara- De 3 crianças.
Prof.ª- De 3 crianças. E aqui [um 2]?
Vários alunos- De dois automóveis.
Prof.ª- E aqui [outro 2]?

Vários alunos- De dois animais de estimação.
Jacira (rapidamente)- E lá em cima é de uma tenda grande e de uma tenda pequena.

Mas apesar de terem conseguido ler esta parte do quadro, os alunos mostravam não ter compreendido o processo. Pois, quando foi solicitado a Márcia que explicasse à turma "o que fizeram com estes resultados em euros", Márcia ficou completamente perdida respondendo "somámos pelos objectos pelas pessoas...".

Tentava-se que Márcia encontrasse algum sentido na estratégia seguida pelo grupo para resolver o problema. Contudo, só depois de várias perguntas colocadas, sem obter resposta, é que Manuel, de outro grupo, verbalizou o raciocínio correcto, sendo depois acompanhado de outros colegas:

Manuel- Eles começaram a somar os preços que iam pagar no mês de Agosto.
Prof.ª- Somaram o preço da...
Manuel- ...da tenda grande...
Manuel e outros alunos- ...da tenda pequena, dos adultos, das crianças, dos automóveis, dos animais de estimação.

O grupo em foco foi o último a apresentar os resultados da resolução da tarefa. Como tinha ficado combinado na segunda parte da actividade Ana leu o problema criado pelo grupo, explicando que eles decidiram fazer uma visita de estudo (ver Figura 32). No entanto, pediu a Sara que explicasse a estratégia apresentada (ver Figura 33). A aluna fez a leitura dos dados do problema com compreensão:

Sara- As raparigas eram 7. Depois, para nós todas precisávamos de 2 tendas grandes
Prof.ª- Certo.
Sara- E vai um adulto que é a professora e dois carros alugados. Os rapazes...

Tomás verbalizou os dados referentes aos rapazes a pedido da professora que ia interrompendo para lhe pedir explicações:

Tomás- Os rapazes eram 12. Tivemos de ficar com 3 tendas grandes e uma pequena...
Prof.ª- Porque é que é preciso uma tenda pequena?
Tomás- É para o meu pai ficar connosco.
Prof.ª- É para este adulto aqui? Por acaso escolheram o teu pai, foi? Então os rapazes iam todos...
Tomás- Em 3 carros alugados.

Preços por dia	
Tenda grande (4 pessoas)	6 euros
Tenda pequena (2 pessoas)	5 euros
Adulto	3 euros
Criança (menos de 12 anos)	2 euros
Automóvel	1 euro
Animal de estimação	1 euro

Numa visita de estudo o 4.º ano A vai ao parque de campismo de Sesimbra e vão lá ficar 1 semana.. Que dinheiro tinhamos de pagar?

R: Tinhamos de pagar 599€ ao todo

Mostrem como poderiam encontrar a solução para um dos problemas matemáticos que criaram.

raparigas 7, 2 tendas grandes, 1 adulto, 2 carros alugados
rapazes 12, 3 tendas grandes, 1 tenda pequena, 1 adulto, 3 carros alugados.

Figura 32 – Formulação de um problema efectuada pelo grupo em foco.

As questões colocadas procuravam encaminhar o raciocínio dos alunos em geral para a verificação de um dos passos da resolução. A intenção de Ana era fazer com que se avaliassem criticamente os passos dados e se compreendesse a relação existente entre o contexto do problema e os cálculos necessários à sua resolução:

Prof.ª- Ora vejam lá, cada carro quantas pessoas levam? No máximo...
Vários alunos- 5.
Pedro- 3 no meio e duas à frente.
Prof.ª- 5. Cada carro leva 5 pessoas. Agora pensem: quantos rapazes iam para lá?
Daniel- 12.
Prof.ª- Mais 1 adulto, 13. Agora: um adulto, o pai do Tomás guiava um carro e quem é que guiava o outro?
Daniel- Professora... eram carros alugados.

38 + 30 + 6 + 5 + 5 = 79 79 x 7 = 553

$$\begin{array}{r} 79 \\ \times\ 7 \\ \hline 553 \\ +\ 35 \\ \hline 588 \end{array}$$

38€ /crianças
30€ /tendas grandes
6€ /dois adultos
5€ /automóveis
5€ / tenda Pequena

Figura 33 – Estratégia utilizada pelo grupo em foco para resolver o problema matemático que criou.

Na sequência do incentivo ao espírito crítico e à avaliação dos resultados, a turma participava com entusiasmo encontrando soluções alternativas:

> Prof.ª- Então, há um lugar que já não conta que vai ocupado pelo chofer. Se um lugar vai ocupado com o chofer, esse carro só leva quantas crianças lá dentro?
> Vários alunos- 4
> Manuel- Não! 3. O pai do Tomás vai sentado ao lado do senhor que vai a conduzir.
> Mónica- O pai do Tomás vai noutro carro.
> Prof.ª- Então o pai do Tomás vai num carro. Já temos um carro. Quantas crianças é que ele leva nesse carro?
> Flávio- 4.

Assim, os alunos eram levados a concluir que seriam necessários mais dois carros que pudessem, conforme a lei, transportar as 19 crianças e os 2 adultos nos automóveis.

Depois da análise da organização dos dados e da informação necessária à resolução do problema, a professora apenas projectava as duas representações dos algoritmos da adição e da multiplicação e o algoritmo desta última, tapando propositadamente a legenda que tinha sugerido aos alunos na segunda parte da actividade, para encontrarem a solução do problema criado.

Perante a projecção e a pergunta de Ana: "vocês entendem o que significa cada um destes números?", só alguns alunos disseram que não, os outros não reagiram.

Então, a professora explica que foi ela quem sugeriu ao grupo a ideia de fazerem uma legenda que pudesse esclarecer quem lesse aquela resolução. Ana mostrou e foi analisando a legenda como se fosse o porta-voz do grupo. O diálogo que se segue evidencia ainda a associação do cálculo mental "às contas de cabeça":

> Prof.ª- Os 38 euros que estão aqui corresponde ao número de ...
> Vários alunos- ...crianças.
> Prof.ª- São os rapazes e raparigas da turma... certo? Como é que eles fizeram as contas? Men... talmente. Eles contaram: são 19 raparigas e rapazes, cada um paga quanto?
> Vários alunos- 2 euros
> Prof.ª- 2 euros. 19 vezes 2...38. Eles fizeram as contas de multiplicar de ...ca-be-ça, men-tal-men-te, certo? Depois escreveram 30 euros, ora o que é este 30?
> Alguns alunos e Prof.ª- As tendas grandes.

Para confirmar se os alunos atribuíam sentido à multiplicação que tinham efectuado, a professora solicitou-lhes que partilhassem o significado dessa operação. Era evidente que a sua intenção era não só levá-los a clarificar ideias, mas também ultrapassar a grande preocupação, demonstrada em praticamente todas as aulas, em apresentar o trabalho frente a todos. O primeiro foi Daniel:

> Prof.ª- E este algoritmo, o que nos diz? Expliquem lá.
> Daniel- Então... todos os dias 79 euros... a turma vai lá ficar uma semana...
> Prof.ª- Certo, e uma semana tem...
> Daniel- 7 dias. Então, em sete dias paga-se 7 vezes 79 euros. E dava 553.

Por sinal, nenhum dos alunos reparou que na adição estava registado um dado, provavelmente o referente à tenda pequena, que deve ter sido ali colocado sem se terem apercebido que no total verbalizado por Daniel, durante a resolução em grupo, apenas tinham contado com ele no passo final da resolução. Depois, foi a vez de Bela mostrar que também tinha compreendido a resolução:

> Prof.ª- Bela, e o que é este 35 aqui?
> Bela- Esse 35?...é a tenda pequena.
> Prof.ª- A tenda pequena como?
> Bela- Então, 7 vezes 5
> Prof.ª- Pois é. 7 dias a 5 euros por dia, não é?
> Bela- Sim. Dá 588 euros tudo.

Apesar da passividade que a maioria dos alunos da turma continuava a demonstrar nesta parte da actividade pedagógica, alguns deles surpreendiam com a sua capacidade de iniciativa. Mara foi uma delas quando se lembrou que se deveria acrescentar a 588 o valor a pagar pelos automóveis a mais. Era evidente que o gosto em descobrir algo de novo se estava a fomentar:

> Mara- E mais os carros que faltam!
> Prof.ª- Explica-te melhor.
> Mara- Dois carros é 2 euros em cada dia...
> Daniel- ... agora vezes porque é 7 dias. Dá 14 euros mais.

Para concluir, a professora valorizou o facto de, em conjunto, podermos trocar ideias e chegar a uma resposta muito mais completa que sozinhos. Era evidente que Ana se referia tanto ao benefício do trabalho em grupos como à partilha de ideias na discussão dos resultados obtidos nesses grupos.

Comentário global

Nesta aula foi dada aos alunos a oportunidade de aprenderem a criar eles próprios os seus problemas matemáticos a partir de uma tabela de preços artificial e de resolverem um deles. Na generalidade, os grupos inventaram problemas em que utilizaram conhecimentos adquiridos e testaram a sua eficácia. Por exemplo: efectuaram cálculos com valores monetários, estimaram a ordem de grandeza de um resultado sem efectuar o cálculo, usaram o algoritmo da multiplicação e da adição e aplicaram a tabuada na resolução do algoritmo da multiplicação e no cálculo mental com números pequenos. Além disso, aprenderam a usar esquemas como estratégia de resolução de problemas (como o apresentado pelo grupo da Mónica) e a organizar os dados num quadro (como o apresentado pelo grupo da Márcia). Aprenderam a comunicar com os outros, a negociar significados e a explicitar oralmente e a representar por escrito os passos seguidos na resolução dos problemas matemáticos que tinham criado.

A análise dos dados mostrou que os grupos, de um modo geral, se empenharam na resolução da tarefa. Mas, de um modo particular, os alunos do grupo em foco evidenciaram diferentes graus de interesse.

Assim, Daniel e Sara foram os que mais contribuíram para a produtividade do trabalho do grupo. Ele assumiu a liderança da actividade, durante a maior parte do tempo, ao tomar decisões acerca da formulação e resolução do problema criado. Pelos diálogos estabelecidos no grupo, era evidente que o aluno encarava essa liderança como consequência de ser o melhor aluno na sala de aula. Esta forma de liderança, de certo modo autoritária, foi aceite e aplaudida por Bela e Sara, de tal forma que ignoravam a vontade de Tomás. Mais uma vez, Daniel mostrou elevada autoconfiança ao resolver a tarefa, pois explicava os seus raciocínios aos colegas para os beneficiar, não percebendo que ele próprio ganharia com essa interacção. Durante a terceira parte da actividade, Daniel foi bastante passivo, não comentando, nem avaliando os resultados dos outros grupos, o que pode indiciar uma prática pouco usual na sala de aula.

Tomás, ao contrário de Daniel, pouco ou nada contribuiu para resolução da tarefa. O facto de insistir em que os animais de estimação constassem na formulação do problema, quando o contexto que pretendiam criar (visita de estudo) em nada se relacionava com isso, levou-o a distrair-se, quase propositadamente, da resolução da tarefa. Esta atitude pode ter a ver com o conflito gerado no grupo, na sessão anterior, e que lhe trouxe alguns constrangimentos quando desejou e persistiu em formular um problema rejeitado por Daniel, por Sara e por Bela.

Bela, a par de Tomás, continuou a ser a aluna que menos contribuiu para o desenvolvimento dos trabalhos, distraindo-se bastante com ele. A aluna mostrou-se dependente de Daniel para lhe explicar tudo o que dizia ou fazia, copiando por ele os registos da resolução da tarefa para evitar esforço da sua parte, pois sabia que era ele quem tinha os melhores resultados a Matemática. Contudo, quando foi chamada a explicar um procedimento, parecia ter compreendido o seu significado, ainda que tivesse tido o apoio da professora para sintetizar a ideia com mais clareza.

Sara teve uma boa participação nesta sessão. Interagiu de forma construtiva com Daniel, colocando os seus pontos de vista, verbalizando o seu raciocínio e ajudando-o na verificação dos procedimentos algorítmicos. Durante a sessão esteve sempre preocupada em copiar os registos por Daniel, uma vez que era ele quem primeiro os fazia. Mostrando-se atenta a todo o processo e compreendendo-o.

Foi curioso notar que, desta vez, não houve tanta agressividade verbal da parte de Daniel, de Sara e de Bela para com Tomás. Isto pode ter ficado a dever-se ao facto de Tomás ter estado menos participativo ou ainda por não ter tido o apoio da professora para continuar a insistir na sua ideia fixa de levar os animais. Pois, sempre que a professora apoiou Tomás, os colegas não ficaram tranquilos parecendo querer ter exclusividade de tratamento por parte dela. Isso parecia confirmar-se, nesta aula, quando foi aceite a sua ideia: considerar o seu pai como um dado do problema. Perante essa circunstância, Daniel deixou de querer representar o grupo na terceira parte da actividade. O facto de revelar a sua intenção de não ser o porta-voz do grupo afligiu todos os outros, uma vez que não gostavam de explicitar para a turma o raciocínio que tinham seguido durante a actividade de resolução de problemas.

A professora actuou com sensibilidade, evitando impedimentos à prossecução da resolução do problema pelo grupo, afirmando que ela própria iria explicar como tinham desenvolvido o trabalho. Na 3.ª parte da actividade pedagógica, aos poucos, foi pedindo explicações aos alunos e assim todos participaram. Também foi interessante verificar que quando questionou os alunos, no caso da apresentação de Mara, ou quando procurou encontrar soluções alternativas, no caso da apresentação do trabalho do grupo em foco, os alunos em geral mostraram-se mais participativos e entusiasmados pela actividade que estava a ser desenvolvida. Acresce-se ainda, que a sua presença junto do grupo se revelou muito importante para ajudar a despistar dificuldades e a construir a resposta certa a partir de uma errada. Isso foi feito através de questões que colocou aos alunos quer nos grupos ou no plenário em colectivo.

Os dados mostram que as questões mais colocadas foram as de focalização para ajudar os alunos a completarem o trabalho e as falsas perguntas de confirmação de conhecimentos para levarem os alunos a interiorizar melhor as ideias. Foram colocadas ainda algumas questões que levaram os alunos a expor os seus raciocínios, no caso da apresentação do trabalho do grupo em foco; e a falar sobre o modo como foi resolvido o problema como é o caso da intervenção de Mónica.

As interacções verticais professora-alunos existentes na 1.ª parte da actividade serviram para informar e partilhar significados acerca da tarefa a desenvolver, enquanto que na 2.ª e 3.ª parte elas são mais de questionamento, de explicação e de validação. As interacções horizontais tiveram lugar apenas na 2.ª parte da actividade quando os alunos trabalhavam em grupo.

Quanto à comunicação das ideias matemáticas, verificou-se mais uma vez que a linguagem oral obteve o primeiro lugar na aula de Matemática. A linguagem escrita foi usada por todos os grupos, tanto na formulação dos problemas como na sua resolução, verificando-se contudo a tendência generalizada dos grupos para usar a linguagem simbólica da matemática nas suas resoluções, evitando usar a linguagem natural para ajudar à compreensão dos símbolos. A título de exemplo, veja-se a resolução do grupo da Márcia (Figura 29) que omitiu alguns passos da resolução e do grupo em foco (Figura 31) que apenas usou uma legenda para comunicar o significado dos símbolos matemáticos. Em relação à formulação de problemas, verificou-se que nos enunciados criados pelos alunos, existiram algumas dificuldades na estrutura semântica dos mesmos, como foi o caso do grupo em foco e do grupo da Mónica. Estes dois grupos foram também os que apresentaram problemas mais complexos do ponto de vista da quantidade de dados a trabalhar.

Relativamente às etapas da resolução de um dos problemas, pode dizer-se que a primeira, ou seja a compreensão do problema foi realizada no seio de cada grupo, uma vez que apenas havia uma tabela no qual o problema tinha que se basear.

A segunda e a terceira etapas, ou seja estabelecer um plano e executá-lo, ocorreram durante o trabalho em grupo e foi Daniel quem estabeleceu um plano, com a colaboração de Sara e da professora; para o executar contou com a colaboração de Sara.

A última etapa, a da verificação dos resultados, foi efectuada com a professora, durante o trabalho em grupo e como validação dos resultados que apresentavam e dos dados com que trabalhavam. Porém, a avaliação dos resultados obtidos foi feita em trabalho colectivo, na terceira parte da actividade, por iniciativa da professora. De um modo geral, quando os trabalhos desenvolvidos nos grupos foram apresentados, os alunos mostraram-se pouco participativos só o fazendo durante a apresentação de Mara e do grupo em foco. No primeiro caso por ter havido confusão na execução do plano e no segundo porque a professora encorajou os alunos a relacionarem os dados com o contexto do problema criado.

Na globalidade, poder-se-á dizer que os alunos foram empenhados, mas manifestaram pouca experiência em expor ideias e em fazer perguntas aos colegas, durante a apresentação e discussão das estratégias encontradas, acabando por aceitar os resultados ou as resoluções sem emitir opiniões. Parece não existirem hábitos de reflexão e espírito crítico por parte dos alunos em relação ao trabalho apresentado por outros.

Capítulo V

CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES

Síntese do estudo

Este estudo, realizado no âmbito da Educação Matemática no 1.º ciclo, surgiu por julgar relevante reflectir e analisar a minha própria prática como professora deste nível de ensino, quando essa prática é apoiada na resolução de problemas, onde se destaca o papel da aprendizagem cooperativa no desenvolvimento da comunicação e da sociabilidade. Para além de considerar a comunicação como um suporte fundamental das aprendizagens matemáticas, entendo por comunicação um processo social onde os intervenientes interagem, trocando informações, influenciando-se reciprocamente na construção de significados.

O objectivo principal deste estudo era compreender o papel da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática e, em especial, o seu contributo para o desenvolvimento da comunicação matemática. Para tal, foi orientado de acordo com as seguintes questões: a) O que é que os alunos aprendem de Matemática quando resolvem problemas?; b) Qual é o papel do grupo nesse processo? e c) Que interacções ocorrem na actividade de resolução de problemas capazes de desenvolver nos alunos a capacidade de comunicar ?

Dada a natureza do estudo, optei por uma metodologia qualitativa de cunho essencialmente interpretativo, com alunos do 4.º ano de escolaridade e em colaboração com a respectiva professora. O trabalho colaborativo entre nós cingiu-se à escolha das tarefas a propor à turma, à escolha do modelo de resolução de problemas a usar nas aulas e à escolha do modo como seria feita essa abordagem. Por uma questão de organização, a minha atenção esteve focalizada num grupo de quatro alunos, enquanto o trabalho em grupos decorreu. Estes alunos foram seleccionados com a ajuda da professora que melhor os conhecia e resultou de um pedido meu para que se formassem grupos heterogéneos em termos de competência matemática e sexo. Contudo, os problemas foram sempre trabalhados por todos os grupos da turma, havendo posteriormente uma fase de discussão e apresentação a toda a turma.

A análise deste trabalho incidiu, essencialmente, sobre a actividade de resolução de problemas e possui um carácter descritivo e interpretativo simultaneamente, procurando uma melhor compreensão relativamente ao problema em estudo. Na impossibilidade de separar a professora da actividade dos alunos, o seu papel é várias vezes salientado, analisado e interpretado.

Após a análise dos dados apresento as conclusões do estudo realizado, procurando responder às questões formuladas. As mesmas foram elaboradas a partir de uma cuidadosa leitura transversal dos comentários globais.

Conclusões do estudo

A matemática aprendida

A primeira questão que pretendia investigar com este estudo traduzia uma preocupação com as aprendizagens matemáticas dos alunos na resolução de problemas. Terminada a análise dos dados recolhidos nas seis aulas proporcionadas pelo estudo, posso afirmar que, quer os alunos com melhores níveis de desempenho, quer os mais fracos, desenvolveram compreensão e conhecimento, utilizaram conhecimentos adquiridos e testaram a sua eficácia, tanto ao nível dos processos como dos conteúdos matemáticos.

Os dados permitem-me afirmar que os alunos aprenderam a usar estratégias de resolução de problemas. Foi o caso da dramatização proporcionada pelo primeiro problema. Tomás, considerado um bom aluno, aprendeu que a dramatização era uma estratégia que poderia ser usada em diversos problemas para os solucionar. Este aluno acabou por tentar adaptá-la a uma nova situação, ao *Acerto de Contas*, atribuindo preços aos objectos e percebendo que, nesse caso, ela não seria a mais vantajosa. Também um aluno de outro grupo, deu a entender que tinha aprendido a usar a tabela e que sabia interpretá-la, na resolução do problema *Higiene Dentária* que criara. Outras estratégias foram abordadas permitindo que os alunos desenvolvessem alguma habilidade na sua utilização ou fossem incentivados a aplicá-las noutras. Foi o caso da resolução de um problema mais simples aquando do segundo problema; da elaboração de uma lista organizada de símbolos pictóricos criados pelos alunos, que permitiriam construir uma tabela, no terceiro problema; da construção de tabelas, quadros e esquemas para organizarem os dados, no caso dos restantes problemas e da utilização de métodos próprios, como no caso do quinto problema. Sobre este aspecto, autores como

Nunokawa (2000) referem a importância do ensino de estratégias de resolução de problemas aos alunos.

Notei que nem sempre os alunos conseguiram a melhor abordagem para a resolução de um problema. Contudo, os alunos que aparentaram maior motivação e interesse, mostraram mais facilidade em identificar o caminho mais acessível para encontrarem uma solução. Nos casos de Sara e Bela, a dificuldade em encontrar a estratégia adequada parece ter ficado a dever-se ao seu fraco investimento e autoconfiança nestas aulas.

Também verifiquei que foi durante o trabalho em grupo que os alunos mais se envolveram, por iniciativa própria, em processos matemáticos como reflectir, avaliar e criticar. Em consonância com Alro e Skovsmose (2002) é em grupo que os alunos se sentem mais à vontade para o fazerem. Porém, aparentaram pouca prática de reflexão e argumentação no âmbito da resolução de problemas. Daniel, por exemplo, um aluno com um papel bastante activo, no seu grupo, em todas as aulas, apenas interveio na apresentação e discussão das estratégias encontradas pelos vários grupos, quando foi porta-voz ou para argumentar o motivo que o levava a não aceitar sê-lo, como foi o caso da resolução da tarefa *Higiene Dentária*. Constatei igualmente que, com o decorrer do estudo, alguns alunos se foram desinibindo acabando por mostrar uma certa vontade de explorar, descobrir, reflectir e avaliar os passos dados pelos companheiros na resolução das tarefas. Estas ideias vão ao encontro das salientadas por Whitin (2004). Esta mudança de atitude dos alunos parece ter ficado a dever-se à disponibilidade mostrada pela Professora para ouvir as suas ideias e ajudá-los a verbalizar os significados, na terceira parte da aula. Foi o que aconteceu na discussão relativa ao terceiro e ao último problema onde os alunos se mostraram mais observadores, críticos e reflexivos.

Ao nível dos conteúdos, a resolução de problemas proporcionada pelo estudo possibilitou que os alunos desenvolvessem e testassem os seus conhecimentos em: (a) aspectos do domínio dos números e das operações, como a habilidade para efectuar cálculos (quer mentalmente quer de papel e lápis) e a habilidade para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações necessárias à sua resolução assim como para explicitar o raciocínio que foi utilizado e, em (b) aspectos do domínio da geometria, como a faculdade para realizar construções geométricas simples recorrendo a material manipulável, a habilidade para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações, a compreensão do conceito de perímetro, o reconhecimento de figuras geométricas simples e a habilidade para estimar a ordem de grandeza de um resultado sem efectuar o cálculo.

Para além disso, também notei que os alunos se sentiram estimulados pelos contextos apresentados nas duas últimas tarefas formulando problemas interessantes do ponto de vista da estratégia que usaram para os resolver. A análise dos dados mostra que, no caso da tarefa *Higiene Dentária,* os alunos procuraram apresentar contextos dignos de crédito e propuseram valores numéricos que tornaram a resolução de problemas bastante fácil. Porém, também se verificou o inverso, nomeadamente na formulação feita por Tomás, que insistiu manter um contexto pouco credível do ponto de vista de Daniel, propondo um valor numérico que tornou a resolução do problema suficientemente difícil, bem como as relações interpessoais.

No caso da resolução da tarefa *Tabela de Preços*, os grupos continuaram a formular problemas baseados em contextos credíveis mas, com diversos dados a trabalhar o que lhes dificultou a resolução dos problemas.

Pode dizer-se que a formulação realizada pelos grupos foi desde a enunciação de meros exercícios ou problemas de um só passo a problemas que exigiram a aplicação de diferentes estratégias de resolução como tabelas, esquemas ou mesmo métodos próprios. De acordo com Silver (1996), os alunos deram a conhecer as próprias experiências, revelando-se capazes de formular problemas de alguma complexidade na sua resolução.

Por fim, poder-se-á afirmar que as aulas de resolução de problemas proporcionadas pelo estudo permitiram que os alunos desenvolvessem a aptidão para explicitar oralmente o raciocínio utilizado na procura de uma solução e para representar por escrito as ideias matemáticas, criando assim oportunidade para os alunos comunicarem, entre si e com a professora, na aula de Matemática. Contudo, a tendência dos alunos foi para representar simbolicamente essas ideias recorrendo o mais possível a formas abreviadas, como foi o caso de Daniel e Sara ou do grupo de Márcia na resolução do último problema.

O papel do grupo

Antes do início do estudo, os alunos acreditavam que o trabalho em grupo poderia trazer conflitos de relacionamento, confusão, menos mérito para o resolvedor da tarefa ou conflitos cognitivos entre os elementos e, por isso, todos os alunos afirmavam preferir trabalhar individualmente.

Durante o estudo e, tal como numa investigação levada a cabo por Yackel *et al* (1993), as crianças não conseguiram trabalhar colaborativamente. Em praticamente todas as aulas de resolução de problemas existiram conflitos afectivos que não conduziram a um trabalho conjunto produtivo. No caso da resolução do problema *O Lobo, a Cabra e a Couve*, existiram discórdias entre as alunas Bela e Sara e Tomás que indiciam existir alguma rivalidade entre eles. No caso da resolução do problema *Acerto de Contas*, Tomás foi alvo de ironia por parte de Bela e Sara quando pretendia testar, individualmente e sem verbalizar, uma ideia que tinha tido. De outra vez, o grupo seguiu estratégias diversas, por sexos, sem manifestar intenção de chegar a consenso, como no caso da resolução do problema *Na Pizaria*. E de outra ainda, Bela, Daniel e Sara insistiram em não querer aceitar as ideias de Tomás, foi o caso da resolução do problema *Higiene Dentária*. Na última resolução, como Tomás não manifestou ideias próprias e se deixou liderar por Daniel, não houve conflitos entre os alunos. Durante a resolução do problema *Fósforos e mais Fósforos*, os alunos conseguiram dividir entre si pequenas tarefas, interagindo de forma concordante e ultrapassando pequenos conflitos, o que trouxe a Tomás o desejo de participar mais activamente na apresentação dos trabalhos do grupo à turma.

O comportamento do grupo, ao longo do estudo, mostrou que, embora os alunos se tivessem sentado à mesma mesa e lhes tivesse sido pedido que resolvessem a tarefa que lhes foi proposta, em conjunto, isso não significou que trabalhassem colaborativamente (César, 1999). As diferenças de comportamento existentes parecem estar relacionadas com o estatuto de melhor aluno da sala de aula atribuído e lembrado pelo sexo feminino do grupo a Daniel. Daniel, considerado um excelente aluno tanto em Matemática como em Língua Portuguesa, liderou as actividades durante a experiência, rivalizando com Tomás, considerado um excelente aluno em Matemática, apenas pela professora, mas pouco comunicativo. Também eram eles que apresentavam estratégias de resolução mais adaptadas aos problemas ou apresentavam soluções, enquanto elas, consideradas boas alunas em Língua Portuguesa, se limitavam a aceitar as propostas de Daniel, numa relação de dependência.

Mas, por outro lado, também se puderam observar no grupo momentos de partilha de ideias, em que o aluno com estatuto de melhor aluno, Daniel, pretendia ver os outros elementos envolvidos nas actividades, chegando a interagir colaborativamente com Sara, de modo positivo, na tarefa *Tabela de Preços*. Isto pode indiciar que o trabalho proporcionado pelo estudo pode ter desenvolvido algumas mudanças de opinião quanto ao trabalho em grupo, nestes alunos.

Todos estes aspectos fazem ressaltar a questão da formação dos grupos de trabalho na sala de aula referida por Artzt (1996). Parece evidente que se os alunos não estavam habituados a participar num propósito comum a todo o grupo, o trabalho colaborativo entre eles não aconteceu tão rapidamente quanto se desejava.

Assim, um pouco em jeito de remate, parece importante realçar que, apesar dos conflitos afectivos internos gerados e ultrapassados pelos seus elementos, o grupo desempenhou um valioso papel na resolução de problemas, na medida em que possibilitou momentos de interacção comunicativa entre alunos que por sua vez permitiram a partilha de conhecimentos matemáticos.

As interacções comunicativas

A análise das actividades de resolução de problemas proporcionadas pelo estudo mostra que as interações na sala de aula, durante essa actividade, não decorreram sempre do mesmo modo. Assim, as interacções variaram com a forma como foi feita a abordagem da resolução dos problemas na sala de aula e consequentemente com os intervenientes na actividade em cada uma das partes da actividade pedagógica.

Durante o estudo, a comunicação das ideias matemáticas na sala de aula desenvolveu-se, principalmente, através da linguagem oral. Embora a linguagem escrita também tivesse tido o seu lugar, ela circunscreveu-se aos registos elaborados pelos alunos e às respostas dadas aos problemas, sob a forma de frase. Verificou-se também a tendência generalizada dos grupos para utilizarem a linguagem simbólica da matemática e evitarem a linguagem natural que ajudasse à compreensão dos símbolos, limitando-se a sua produção escrita a cálculos para obtenção da solução. Houve também recurso à linguagem gestual, como a dramatização do problema *O Lobo, a Cabra e a Couve*, as expressões faciais utilizadas por Sara, na sua interacção com Daniel, no problema *Higiene Dentária*, e pela professora no problema *Fósforos e mais Fósforos*.

A apresentação e introdução dos problemas pela professora a toda a turma, constituiu o que se considerou a primeira parte das actividades pedagógicas e foi sempre feita através de interacções verticais, em que houve regulação da participação dos alunos e que se traduziu num diálogo professora-aluno. Atitudes semelhantes foram também observadas por Veia (1996). Estas interacções desenvolveram-se através da exposição e do questionamento aos alunos, por meio de perguntas de focalização e de confirmação fechadas e de resposta curta. As perguntas realizadas permitiram a interpretação dos enunciados e a partilha do significado de expressões menos usuais, necessárias à compreensão do problema. Apesar de muitas vezes essa partilha parecer não ter sido suficiente para o desenvolvimento da fase seguinte da resolução, nos três primeiros problemas, para o grupo em foco, isso não foi motivo para desinteresse, pelo contrário, os alunos evidenciaram firmeza e dedicação, com excepção de Bela que manteve sempre uma atitude de desapego às actividades até ao final do estudo. Quanto às interacções aluno-professora, elas verificaram-se como consequência das perguntas colocadas pela professora. Em relação às interacções horizontais, elas não se confirmaram nesta primeira parte da actividade. Em suma, as interacções comunicativas que se verificaram nesta parte da actividade e que partiram todas de Ana, parecem ter desenvolvido nos alunos a capacidade de aprender a ouvir – ouvir o colega e ouvir a professora.

Já na segunda parte das actividades, ou seja, na resolução dos problemas pelo grupo em foco, verificou-se uma menor intenção de controle por parte da professora e um papel mais activo dos alunos, com grande número de interacções horizontais. Estas visaram o estabelecimento de planos de resolução para os problemas propostos e a execução desses planos e tiveram como suporte a partilha de ideias, a distribuição de trabalho, os pedidos de esclarecimento relativos aos registos, os pedidos de confirmação de ideias, o questionamento como forma de seguir um raciocínio, os pedidos de ajuda, a ajuda ao semelhante e a crítica às ideias do outro. Apesar dos conflitos existentes no grupo, notados e já assinalados, Sara e Daniel estabeleceram entre si, na resolução da última tarefa, interacções que os levaram a realizar um trabalho que favoreceu os dois, o que está de acordo com os resultados obtidos por César (1999). Pois, enquanto Daniel, considerado o mais forte, explicitava o seu raciocínio em voz alta, encorajava Sara, a mais fraca, a deixar para trás a delegação de todo o trabalho nos mais fortes, e conseguir detectar alguns erros cometidos durante a resolução, confirmar os procedimentos algorítmicos realizados, a duvidar do raciocínio de Daniel, ajudar a verificar os resultados e a ganhar ânimo para fazer a exposição do trabalho do grupo, que acabou, praticamente, por ser do par.

Nesta segunda parte também se puderam verificar interacções verticais. Estas, realizadas por meio de perguntas de focalização e de confirmação, partiram sempre da professora e permitiram aos alunos quer o completamento das resoluções quer a verificação das soluções ou ainda a interiorização de procedimentos. Um exemplo desta última situação foi o questionamento feito a Sara na resolução do problema *Higiene Dentária*, que lhe permitiu ganhar confiança nas suas capacidades. Foram também realizadas algumas perguntas de inquirição onde era dado a conhecer o modo como os alunos tinham encontrado determinada solução e que serviam como ponto de partida para os ajudar a reflectir sobre os seus raciocínios e a negociar os significados dos seus registos, para além de confirmar o resultado. Este tipo de perguntas parecem poder influenciar o envolvimento do grupo na verificação dos passos dados e, em simultâneo, proporcionar momentos de partilha e negociação de significados. Estas ideias vão ao encontro das sublinhadas por Bishop e Goffree (1986).

A terceira parte da actividade: a comunicação e discussão dos caminhos ou estratégias encontrados(as) por cada grupo, em plenário de turma, revelou-se um momento causador de algum embaraço e muita insegurança para alguns alunos, mas também de muito prazer para outros. Por exemplo, Sara, Bela e Tomás do grupo em foco, chegaram a manifestar o desejo de não apresentar o seu trabalho por se sentirem acanhados em expôr as ideias à turma. Outros, como Manuel e Mara, viviam esse momento com bastante entusiasmo, por gostarem de mostrar as suas descobertas. Nesta parte da actividade verificou-se, de novo, um grande número de interacções verticais. Assinalo que não foi fácil encontrar a maneira de realizar a discussão dos trabalhos realizados na resolução de problemas com os alunos. A verdadeira discussão era praticamente nula, resumindo-se à exposição do porta-voz do grupo para toda a turma, muitas vezes acompanhada de perguntas de confirmação da parte da professora para ajudar os alunos a interiorizarem as ideias e a ganharem mais confiança em si. Assim, os alunos revelaram não ter o hábito de interpelar os colegas acerca do trabalho apresentado, nem de o defender, mostrando-se pouco participativos. No entanto, quando foram chamados pela professora a verificar soluções, como na tarefa *Na Pizaria* e na tarefa *Tabela de Preços*, os alunos revelaram-se muito motivados para analisar os resultados exibidos e ainda para os criticar, contribuindo para isso, questões como "reparem o que acontece com as combinações que o grupo fez" ou "ora vejam lá, quantas pessoas pode levar cada carro". Foi também notória a sua participação quando em interacção vertical tentaram descobrir as regularidades na resolução de *Fósforos e* *mais Fósforos*, depois de lhes serem colocadas questões do tipo "como é que fizeste?", "como é que pensaste?", "e agora?", comunicando com vivacidade as suas ideias.

Não obstante, ficou saliente a importância atribuída às interacções verticais na sala de aula como forma de promover a aprendizagem dos alunos. Porém, é evidente que as interacções comunicativas fomentadas entre os alunos não parecem ter a dimensão e a importância que lhe atribuem as orientações curriculares para o ensino da Matemática (DEB, 2002), ou os estudos realizados por César (1999), indo, assim, ao encontro dos resultados obtidos por Vieira (1997).

Assim, poder-se-á concluir que as interacções foram decisivas para: i) o envolvimento dos alunos nas actividades; ii) a criação do espírito investigativo nos alunos; iii) o desenvolvimento da capacidade de comunicar dos alunos.

Recomendações e limitações

A resolução de problemas faz parte do nosso dia-a-dia. A cada momento, no local de trabalho, na nossa vida em família, no nosso grupo de amigos somos confrontados com problemas para os quais precisamos de encontrar uma solução. Também as crianças são desde cedo colocadas perante situações de resposta difícil. Para as resolver, muitas vezes é necessário estabelecer atitudes solidárias em relação aos outros, respeito pelo ritmo de cada um, interesse em escutar as ideias dos outros, respeito pelas ideias diferentes das nossas e na promoção da nossa autoconfiança e na dos outros. Neste ponto de vista, a aula de Matemática, através da resolução de problemas, pode ser o local de aprendizagem que estimula a interacção comunicativa entre os alunos, incentivando-os a utilizar o sentido crítico, a serem reflexivos e argumentativos em relação ao seu trabalho e ao dos colegas e a tornarem-se mais autoconfiantes, para além de poderem encarar a Matemática de uma forma mais positiva. Mas, para isso, cabe também ao professor promover, na sala, aulas de resolução de problemas em que os alunos trabalhem em grupo desde os primeiros anos de escola incentivando a criação de um verdadeiro ambiente de aprendizagem que os torne autónomos, críticos, reflexivos e argumentativos em relação ao seu trabalho e ao dos outros.

Dada a natureza da área de investigação em que este estudo se insere, é possível sugerir algumas recomendações para o trabalho pedagógico na sala de aula e para a investigação neste domínio.

Ficou claro neste estudo que o modo como os alunos trabalham, durante a resolução de problemas, produz efeitos significativos na forma como os intervenientes interagem e comunicam entre si e no modo como o professor orienta as actividades.

Reconhecendo todo o valor da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática, nomeadamente no desenvolvimento da comunicação matemática, saliento a necessidade de se investir maior atenção neste último aspecto. Destaco a que o professor deve dar à orientação da actividade dos alunos na resolução de problemas. Os resultados indicam que a sua atitude deverá ser questionadora, incidindo particularmente na partilha e negociação de significados estimulando os alunos a falar e a contribuir com frequência. A discussão final pode ser também um momento fundamental dessa partilha, devendo o professor incentivar, conjuntamente, o questionamento do aluno ao aluno e a argumentação dos mesmos na defesa das suas ideias. Saliento, desse modo, a importância dos alunos interagirem entre si, trocando e negociando significados e não simplesmente apresentando resultados.

Este estudo permitiu-me reflectir sobre vários aspectos relacionados com o papel do professor e do aluno na resolução de problemas e sobre o modo como se desenvolve a comunicação neste processo. Há que continuar a investir neste domínio, no sentido de se incentivarem os professores a uma metodologia de trabalho baseada nas interacções comunicativas na sala de aula.

Daí destaco um aspecto que tem a ver com a dificuldade do professor em orquestrar situações colectivas de comunicação, na sala de aula, com toda a turma e a justa medida em que deve apoiar os alunos. Ficou patente que o desenvolvimento da comunicação matemática passa por organizar o trabalho dos alunos de diferentes modos, ajudando-os a dividir entre si pequenas tarefas para que sintam que estão a contribuir para um trabalho colectivo. A capacidade de comunicar na resolução de problemas mostrou progredir com a experiência, portanto, o seu desenvolvimento requer um trabalho continuado e persistente.

Este estudo demonstrou que existem dois aspectos a ter em conta na actuação do professor, durante a actividade de resolução de problemas, na sala de aula: (i) o professor deve estar atento ao desenrolar de todo o processo e ajudar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades; (ii) mas, deve evitar dar pistas em demasia, substituirse aos alunos falando por eles, dirigir excessivamente as suas acções ou ainda assumir o papel de principal validador das ideias verbalizadas pelos alunos.

Os resultados do estudo evidenciam a necessidade de uma reflexão sobre o tratamento destas questões na formação contínua, a fim de possibilitar aos professores do 1.º ciclo do ensino básico um melhor entendimento acerca da comunicação como metodologia de ensino e como competência matemática a desenvolver na sala de aula, e das implicações que daí resultam para a aprendizagem da Matemática.

Assim, considero de todo o interesse continuar este tipo de investigação, prolongada no tempo, numa perspectiva evolutiva do desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos. Uma vez que não se conhecem estudos, nesta área, neste nível de ensino, existe, por isso, grande desconhecimento de muitos aspectos, podendo levantar-se questões como: Que natureza têm as interacções estabelecidas entre os alunos quando estes trabalham em pequenos grupos? Em que medida as trocas verbais entre os alunos influenciam o modo como aprendem matemática? Que tipo de tarefas utilizadas na aula de Matemática poderá trazer contributos importantes para o desenvolvimento da comunicação matemática? Que dificuldades sente o professor na condução dessas tarefas?

Para termimar, algumas limitações se colocam à validação deste estudo. A primeira tem a ver com a dificuldade em me distanciar completamente do facto de ser professora do primeiro ciclo e, portanto, a circunstância de ter experiência de aulas de resolução de problemas pode ter levado a alguma falta de isenção na interpretação dos dados.

Uma outra limitação diz respeito ao facto do trabalho colaborativo com a professora da turma se ter limitado à escolha das tarefas, à escolha do modelo de resolução de problemas (Polya) a usar nas aulas e à escolha do modo como seria feita essa abordagem, mas isso ficou a dever-se ao facto do estudo decorrer num curto período de tempo.

Há ainda a assinalar que todas as actividades foram enquadradas por um contexto artificial. Assim, se por um lado a variedade dos problemas propostos aos alunos lhes proporcionou situações onde puderam explorar diversas estratégias de resolução num curto espaço de tempo, por outro, não se consegue perceber como reagiriam os alunos se elas fossem desenvolvidas no contexto das actividades da turma.

Importa também referir que uma outra limitação é precisamente a que resulta dos condicionalismos de uma dissertação, pois, um estudo desta natureza beneficiaria se abrangesse todo o percurso escolar relativo a pelo menos um ano completo de escolaridade, permitindo retirar conclusões mais relevantes e fundamentadas.

Finalmente, pode também constituir uma limitação, o facto de se ter estudado uma turma, orientada por uma professora, num determinado contexto, pelo que é necessário acautelar quaisquer generalizações a outros alunos e a outros contextos diferentes.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1988). *Viagem de ida e volta.* Lisboa: APM.

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só). *Educação e Matemática 8,* p.7-10,35.

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Alro, H. e Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection and critique.* Dordrecht: Kluwer.

Artzt, A, F. (1996). Developing Problem-Solving Behaviors by Assessing Communication in Cooperative Learning Groups. Em P. C. Elliott e M. J. Kenney (Eds.), *Communication in Mathematics, K12 and Beyond* (pp. 116-125). Reston, Va: NCTM.

APM. (1988). *Renovação do Currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

APM. (1998). *Matemática 2001, diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática.* Lisboa: APM.

Baroody, A. (1993). *Problem solving, reasoning and communicating, K-8: Helping children think mathematically.* New York: Macmillan.

Becker, J. P. e Selter, C. (1996). Elementary School Practices. Em A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* (pp. 511-564). Dordrecht: Kluwer.

Bishop, A. J., e Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. Em B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D Reidel.

Bitti, P. R., e Zani, B. (1997). *A Comunicação como Processo Social.* Lisboa: Editorial Estampa Lda. (Trabalho original em italiano publicado em1983).

Block, D., Martinez, P., Dávila, M., Ramirez, M. (2000). Usos de Los Problemas en La Enseñanza de Las Matemáticas En La Escuela Primaria. Em J. Carrillo Yãñez e L.C. Contreras (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siclo XXI- una visión internacional desde múltiplas perspectivas y niveles educativos* (pp. 147-179). Huelva: Hergué.

Bogdan, R., e Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A., e Borrões, M. (1995). *O ensino/aprendizagem da matemática - algumas perspectivas metodológicas.* Publicações «Universidade de Évora», 4. Departamento de Pedagogia e Educação. Évora

Bransford, J. D., Brown, A., Cocking, R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience and School.* Washington. D. C.: National Academy Press.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8.º ano.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Bussi, M. G. B. (1998). Joint activity in mathematics classrooms: A Vygotsky analysis. Em F. Seeger, J. Voigt and U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pp. 13-49). Cambridge: Cambridge University Press.

Carraher, T., Carraher, D. e Schliemann, A. (1993). *Na vida dez, na escola zero*, 7.ª edição. São Paulo: Cortez.

Carvalho, C. (2003, Julho). Comunicações e interacções sociais nas aulas de matemática. Em CIEFCUL (Ed.), *Itinerários Investigar em Educação* (pp. 547-562). Lisboa: Centro de Investigação em Educação da FCUL. Conferência apresentada no I Seminário de Ensino de Matemática no âmbito da 14ª Conferência realizada pela COLE, Campinas (S. Paulo)- 22-25 Julho 2003. Recuperado em 2005, Agosto 12, de http://www.educ.fc.ul.pt/cie/membros/ccarvalho/docc53.pdf

César, M., Torres, M., Caçador, F. E Candeias, N. (1999).E se eu aprender contigo? A interacção entre pares e a apreensão de conhecimentos matemáticos. Em M. V. Pires, C. M. Morais, J. P. Ponte et al (Orgs.), *Caminhos para a Investigação em Educação Matemática em Portugal* (pp.73-89). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

César, M. (1999). Interacções matemáticas e apreensão de conhecimentos matemáticos. Em J. P. Ponte e L. Serrazina (Org.), *Actas da Escola de Verão Portuguesa-Italiana-Espanhola* (pp. 5-46). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

César, M. (2000). Interagir para aprender: A escola inclusiva e as práticas pedagógicas em Matemática. Em *Actas do ProfMat 2000* (pp.145-158). Lisboa: APM.

Charles, R. & Lester, F. (1982). *Teaching Problem Solving*. London: Edward Arnold

Cobb, P., Yackel, E. e Wood, T. (1993). Theoretical orientation. Em T. Wood, P. Cobb, E. Yackel e D. Dillon (Eds.), *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 6*, (pp. 55-68). Reston, Va: NCTM.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.

Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I., Zabala, A. (2001). *O construtivismo na sala de aula - Novas perspectivas para a acção pedagógica.* ASA Editores II, S.A.(Trabalho original em espanhol, publicado em 1997).

Diciopédia 2005 [DVD-ROM]. *Comunicar.* Porto:Porto Editora.

Curcio F. R. (1990). Mathematics as communication: using a language-experience approach in the elementary grades. Em T. Conney and C. R. Hisen (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics on the 1990S* (pp. 69-75). Reston Va: NCTM.

Davis, P. e Hersh, R. (1995). *A Experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.

DEB. (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação.

DEB. (2002). *Organização curricular e programas* (3.ª edição). Lisboa: Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. Em P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática:*

textos seleccionados (pp. 25-47). Lisboa: Matemática Para Todos e APM. (Texto original em inglês publicado em 1991)

Fernandes, D. (1992). Resolução de problemas: investigação, ensino, avaliação e formação de professores. Em M. Brown; D. Fernandes; J. F. Matos e J. P. Ponte (Orgs.), *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 45-103). Lisboa: IIE e Secção de Educação Matemática da SPCE.

Fernandes, D. M. (1994). *Educação Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico: aspectos inovadores.* Porto: Porto Editora.

Fonseca, L. (2000). Problemas com aparatos. Em *Actas do ProfMat 2000* (pp.311-325). Lisboa: APM.

Goldenberg, E. P. (1998a). "Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo (I). *Educação e Matemática*, 47, 31-35 e 44.

Goldenberg, E. P. (1998b). "Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo (II). *Educação e Matemática*, 48, 37-44.

Goldenberg, E. P. (1999). Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática. Em P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: APM.

Jesus, A. (2004). *As actividades matemáticas de natureza investigativa nos primeiros anos de escolaridade – perspectivas e envolvimento dos alunos.* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Kantowski, M. G. (1980). Some thoughts on teaching for problem solving. Em S. Krulik & R. E. Reys (Eds.): *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 195-203). Reston, Va: NCTM.

Kilpatrick, J. (1987). "Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From?", Em A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). London: LEA.

KruliK, S. & RudniK, J. A. (1993). *Reasoning and Problem Solving – A Handbook for Elementary School Teachers.* Massachusetts: Allyn and Bacon.

Laborde, C. (1996). Duas utilizações complementares da dimensão social nas situações de aprendizado da Matemática. Em C. Garnier, N. Bednarz, I. Ulanovskaya e colaboradores (Eds.), *Após Vygotsky e Piaget – perspectivas social e construtivista. Escolas russa e ocidental* (pp. 29-45). Trad. Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas

Lampert, M. & Cobb. P. (2003). Communication and language. Em J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 237-249). Reston, Va: NCTM.

LeBlanc, J. F., Proudfit, L. e Putt, I. (1980). Teaching problem solving in the elementary school. .Em S. Krulik e R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 104-116). Reston Va: NCTM.

Lindquist, M. & Elliott, P. (1996). Communication – An Imperative for Change: A Conversation with Mary Lindquist. Em P. Elliott e M.Kenney (Eds.): *Comunication in Mathematics, K-12 and Beyond* (pp. 1-10). Reston Va: NCTM.

Mamede, E. (2000). *A calculadora na resolução de problemas: um estudo de caso no 1.º Ciclo do Ensino Básico.* Tese de Mestrado, Universidade do Minho.

Matos, J. M., e Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Menezes, Luís. (1995). *Concepções e práticas de professores de matemática: contributos para o estudo da pergunta.* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

ME-DGIDC. (2004). *Provas de Aferição do ensino básico – relatório nacional.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Musser, G. L. & Shaughnessy, J. M. (1980). Problem-solving strategies in school mathematics. Em S. Krulik e R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 104-116). Reston, Va: NCTM.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* (Tradução portuguesa de Curriculum and evaluation standards for school mathematics, 1989). Lisboa: APM e IIE.

NCTM. (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* (Tradução portuguesa dos Professional Standards, 1991). Lisboa: APM.

NCTM. (1998). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* Colecção de Adendas. Anos de escolaridade K-6. 1.º ano Lisboa: APM.

NCTM. (2000). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* Colecção de Adendas. Anos de escolaridade K-6. 4.º ano.Lisboa: APM.

Nunokawa, K. (2000). Heuristic Strategies and Probing Problem Situations. Em J. Carrillo Yãñez e L.C. Contreras (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siclo XXI-una visión internacional desde múltiplas perspectivas y niveles educativos* (pp. 81-117). Huelva: Hergué.

Oliveira, M. (2000). *O professor, os alunos e as interacções na aula de matemática: dois estudos de caso com turmas do 7.º e 8.º ano.* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Palhares, P. (2004). *Elementos de matemática para professores do ensino básico.* Lisboa: Lidel.

Pires, M. I. V. (1992). *Processos de Resolução de Problemas: uma abordagem à construção de conhecimento matemático por crianças do ensino primário.* (Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.

Pirie, S. (1996). Is Anybody Listening? Em P. Elliott e M.Kenney (Eds.): *Comunication in Mathematics, K-12 and Beyond* (pp. 105-115). Reston, Va: NCTM.

PISA. (2003). *Relatório final do Project for International Student Assessment.* Recuperado em 2005, Agosto 12, de http://www.gave.pt/pisa/resultados_pisa2003.pdf

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas.* (tradução portuguesa do original em inglês). Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (1993). Professores de Matemática: Das concepções aos saberes profissionais. Em *Actas do IV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp.59-80). Lisboa, APM.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso em educação Matemática. *Quadrante,* 3 (1), 3-18.

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., e Abrantes (1997). *Didáctica.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral do Ensino Secundário.

Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: Implicações Curriculares.* Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H. e Segurado, M. I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas.* Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., e Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2004). La actividad matemática en el aula. Em J. Giménez, L. Santos e J. P. Ponte (Coords.), *Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alunos.* Barcelona: Editorial GRAÓ.

Renshaw, P. (1996). A sociocultural view of the mathematics education of young children. Em H. Mansfield et al. (Eds.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children*, (pp. 59-78). Dordrecht: Kluwer.

Romão, M. Margarida. (1998). *O papel da comunicação na aprendizagem da Matemática: um estudo realizado com quatro professores no contexto das aulas de apoio de Matemática.* (Tese de Mestrado, Universidade do Algarve). Lisboa: APM.

Saraiva, M. e Bernardes, A. (1998). As tarefas: elementos (e dilemas) tidos em conta na sua concepção. Em P. Abrantes; M. Ceia; A. Silva; G. Cebola; M. A. Pinheiro (Orgs.). *VI Encontro de Investigação em Educação Matemática-Desenvolvimento Curricular em Matemática.* (pp.135-145). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Schoen, H., Bean, D. e Ziebarth, S. (1996). Embedding Communication Throughout the Curriculum. Em P. Elliott e M.Kenney (Eds.): *Comunication in Mathematics, K-12 and Beyond* (pp. 170-179). Reston Va: NCTM.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? Em P.Abrantes, L.C. Leal e J.P. Ponte (Orgs.), *Investigar para Aprender Matemática (textos seleccionados)* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Silver, E. A. (1996). Acerca da Formulação de Problemas de Matemática. Em P.Abrantes, L.C. Leal e J.P. Ponte (Orgs.), *Investigar para Aprender Matemática (textos seleccionados)* (pp. 139-162). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Suydam, M. N. (1980). Untangling clues from research on problem solving. Em S. Krulik e R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 34-50). Reston, Va: NCTM.

Veia, L. (1996). A *resolução de problemas o raciocínio e a comunicação no 1.º ciclo do ensino básico – três estudos de caso.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Vieira, G. M. (1997). *O desenvolvimento profissional dos professors do 1.º ciclo na área da matemática: três estudos de caso no contexto de um trabalho colaborativo* . (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Vygotsky, L. S. (2003). A *Formação Social da Mente – O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores*, 6.ª edição. São Paulo: Martins Fontes.

Voigt, J. (1998). The culture of the Mathematics classroom: Negotiating the mathematical meaning of empirical phenomena. Em F. Seeger, J. Voigt and U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pp. 191-220). Cambridge: Cambridge University Press.

Whitin, D. J. (2004). Building a Mathematical Community through Problem Posing. Em R. N. Rubenstein and G. W. Bright (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Mathematics* (pp. 129-140). Reston, Va: NCTM

Wood T., Cobb, P. e Yackel, E. (1993). The nature of whole-class discussion. Em T. Wood, P. Cobb, E. Yackel e D. Dillon (Eds.), *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 6*, (pp. 55-68). Reston, Va: NCTM.

Wood, T., Merkel, G., Uerkwitz, J. (1996). Criar um ambiente na aula para falar sobre matemática. *Educação e Matemática*, 40, 39-43.

Yackel, E. e Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27(4), 458-477.

Yackel, E., Cobb, P. e Wood T. (1993). Developing a basis for mathematical communication within small groups. Em T. Wood, P. Cobb, E. Yackel e D. Dillon (Eds.), *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 6*, (pp. 33-54). Reston, Va: NCTM.

ANEXOS

Anexo 1

Informação ao Conselho Executivo

..............., 6 de Outubro de 2004

Exma. Sr.ª

Presidente da Comissão Instaladora

Do Agrupamento de Escolas ....

Por me encontrar a desenvolver um trabalho de Mestrado na área da Didáctica da Matemática, pretendia recolher dados da forma como os alunos do 4.º ano interagem e comunicam no processo de resolução de problemas de matemática, nessa escola.

Com esse propósito e com a vontade expressa de colaboração por parte de uma colega pertencente a esse agrupamento, irei deslocar-me com alguma frequência à sua sala de aula para proceder à recolha de dados (entrevistas, inquéritos, registos áudio e vídeo) da actividade dos alunos.

Gostaria também de manifestar a minha disponibilidade para, caso haja professores interessados em conhecer o tipo de trabalho que pretendo realizar, efectuar com eles uma sessão de trabalho, ou colocar à disposição materiais que considerem de grande valia.

Grata pela atenção dispensada,

Sempre ao dispor

(Deolinda Maria Guerreiro Custódio Ribeiro)

Anexo 2

Informação aos Encarregados de Educação

.........., 7 de Outubro de 2004

Exmo. (^{a}) Sr. (^{a})

Encarregado(a) de Educação

Neste ano lectivo, a turma do seu educando irá participar na realização de um conjunto de actividades na área curricular da Matemática. Estas actividades desenvolvem-se no âmbito de um trabalho de Mestrado. Pretende-se, assim, estudar a forma como os alunos do 4.° ano interagem e comunicam no processo de resolução de problemas de matemática.

Acresce-se que a resolução de problemas é considerada, no Currículo do Ensino Básico, como ponto de partida para a introdução dos diferentes conceitos, sendo ainda referenciada como a actividade que, por excelência, é capaz de desenvolver o raciocínio e a comunicação matemática nos alunos.

Nesse contexto, e para se proceder à recolha de dados, será necessário registar em áudio e vídeo as actividades realizadas e entrevistar alguns dos alunos, pelo que se solicita e agradece desde já a sua compreensão. Informa-se ainda que será preservada a identidade de todos os intervenientes.

Caso necessite de mais esclarecimentos, estaremos ao seu dispor. Não hesite em contactar-nos pessoalmente.

Obrigada pela atenção.
Com os melhores cumprimentos

Tomei conhecimento de que o meu educando irá participar na realização de um conjunto de actividades, entrevistas e inquéritos, no âmbito da área da Matemática. Assim, e nos termos supracitados, **autorizo/não autorizo** o seu registo em áudio e vídeo. (Riscar o que não interessa)

O Enc. de Educação: ____

Do aluno: ____

Data: ______/______/__________

Anexo 3

Guião da entrevista à Professora

Tema: Caracterização da prática pedagógica no domínio da Resolução de Problemas de Matemática
Público/alvo: professora do 1.º Ciclo
Objectivos:
☑ Entender as suas preocupações com o ensino/aprendizagem da Matemática no 1.º ciclo;
☑ Conhecer a relação da entrevistada com a Matemática: vivência enquanto aluna, perspectiva enquanto professora;
☑ Recolher informações sobre a prática da professora acerca de *problemas de matemática* e da *resolução de problemas* na sala de aula;
☑ Conhecer a importância dada à comunicação na aula de matemática;

Blocos	Objectivos	Tipo de questões
I - Legitimação da entrevista e motivação da entrevistada	1. Dar a conhecer as finalidades da entrevista; 2. Motivar a entrevistada para colaborar; 3. Informar sobre o processo de recolha da informação; 4. Garantir a confidencialidade das opiniões e informações prestadas; 5. Garantir informação sobre o resultado final da investigação; 6. Explicitar o modo de condução	• Dar a conhecer, de uma forma global, o projecto de investigação; • Solicitar e agradecer a prestimosa colaboração da entrevistada para o prosseguimento do estudo; • Disponibilizar o trabalho final que venha a ser realizado.

	da entrevista; 7. Informar da duração provável da entrevista; 8. Solicitar autorização para a gravação da entrevista.	• Propor a gravação da entrevista assegurando o carácter sigiloso das informações prestadas no decurso da mesma e no contexto académico;
II - Caracterização do percurso académico e profissional	1. Conhecer as vivências da entrevistada enquanto professora.	• Propor à professora que se pronuncie relativamente: - À sua formação académica; - Ao ano em que se formou e ao número de anos de serviço; - Às razões que a levaram a escolher esta profissão; - Ao número de anos de serviço na escola; - Ao ano lectivo e área curricular que mais a atrai; - Ao ano de escolaridade que lecciona e características da turma; - Ao modo como decorre o seu dia a dia na escola; - A experiências (pedagógicas) mais significativas (positiva e negativamente); - Ao seu envolvimento em projectos.
III -Percepção face ao ensino e à aprendizagem da Matemática	1. Perceber a relação da entrevistada com a Matemática;	• Solicitar à entrevistada que: - Descreva a sua experiência passada (enquanto aluna) e presente (enquanto professora) com a Matemática, (gostos, preferências, medos...); - Refira se faz matemática, por prazer, fora da escola. Se sim, dê exemplos;

no 1.º ciclo	2. Conhecer a importância dada ao papel do professor e dos alunos no ensino e na aprendizagem da Matemática; 3. Conhecer a atitude da entrevistada acerca do processo de aprendizagem dos alunos	- Diga o que é preciso para se gostar de Matemática; - Refira o tempo semanal/diário que dedica à Matemática na sala de aula; - Diga como se actualiza em Educação Matemática. - Refira os aspectos a que dedica mais atenção numa aula de Matemática (aplicação de procedimentos, procura de diferentes estratégias para chegar à resposta, utilização do calculo mental, resolução de problemas); - Fale do papel do professor, do aluno e da turma na aprendizagem da matemática; - Mencione como propõe a aprendizagem de novos conceitos de matemática aos seus alunos; - Enumere tarefas que propõe habitualmente aos seus alunos, nesta área; - Refira se os alunos recorrem a material para resolverem as tarefas propostas; - Conte como e quando usa o manual de Matemática; - Diga como estão habitualmente dispostos os alunos, quando fazem matemática e porque escolhe essa e não outra disposição.
IV - Percepção da entrevistada acerca de Problemas e da Resolução de Problemas	1. Recolher informações sobre o significado atribuído a *problemas* e a *Resolução de Problemas*;	• Pedir à entrevistada que: - Das tarefas apresentadas, enumere as que considera serem problemas de matemática. Caso não considere alguma, explicite porquê; - Cite qual delas considera ser o melhor problema, justificando a razão da sua escolha; - Antecipe se os seus alunos seriam capazes de os resolver; - Mencione a relação dos seus alunos com os

		problemas; - Fale do tipo de problemas que propõe aos seus alunos e com que objectivos os propõe; - Refira se costuma propor aos alunos que formulem problemas e a partir de que situações? - Comente a afirmação "A Resolução de Problemas é, ao mesmo tempo, um objectivo, um conteúdo e um método"; - Refira se, nas suas aulas, tem algum momento na semana dedicado à resolução de problemas ou se essa é uma actividade que acontece no desenvolvimento integral do programa e que diga qual a razão dessa escolha; - Refira que lugar ocupa a resolução de problemas na sua planificação semanal/quinzenal; - Mencione as dificuldades sentidas pelos alunos quando resolvem problemas; - Diga como pensa que um professor pode ajudar a melhorar a capacidade de resolver problemas nos alunos; - Diga o que pensa do facto de se "pensar alto" quando se resolve um problema e, se costuma fazê-lo (como professora), porque o faz; - Mencione e justifique a sua atitude perante o caso de um ou mais alunos que se revelem pouco autónomos na escolha da estratégia; - Refira a importância que atribui à resolução de problemas no âmbito do currículo de Matemática; - Diga, justificando, a que dá mais valor na resolução de problemas, se ao processo ou ao produto.

		- Apresente 3 argumentos a favor da resolução de problemas e 3 argumentos contra essa abordagem no 1.º ciclo.
V - Resolução de Problemas, interacções e comunicação	1. Averiguar qual a importância atribuída pela entrevistada à resolução de problemas como meio para desenvolver a comunicação matemática	- Comente a afirmação: "A Resolução de Problemas é uma actividade fundamental capaz de desenvolver o raciocínio e a comunicação." - Refira que ambiente de trabalho considera fundamental para que os alunos comuniquem as suas ideias matemáticas; - Diga como costuma correr uma aula sua onde se trabalha a resolução de problemas; - Diga como é que os alunos comunicam à turma os seus raciocínios; - Indique que atitude toma perante a resposta/argumentação de um aluno; - Refira o tipo de linguagem mais usada pelos alunos (oral, gestual, pictórica/icónica e textual), na resolução de problemas e se, como professora, há algum desses tipos que valorize mais justificando a sua resposta; - Diga que atitude toma se estiver perante um grupo de alunos que não está no caminho certo para encontrar a solução; - Diga se solicita aos alunos que escrevam sobre a maneira como encontraram a resposta e qual a razão; - Refira se estimula os seus alunos a falar e a escrever sobre matemática e porque o faz; - Indique o papel que o professor deve assumir durante a actividade de resolução de problemas, no sentido de ajudar a estimular a comunicação entre os alunos.

Anexo 4

Situações apresentadas à professora na entrevista

Situação A

A Joana andou a investigar e concluiu que em cada cinco pessoas, duas tinham olhos azuis. Com base nesta informação decidiu estimar quantos dos 30 alunos da sua turma tinham olhos azuis.

Qual terá sido a sua resposta?

Situação B

O avô da Marta plantou 42 dezenas de árvores. Quando a Marta o foi visitar ele disse-lhe que só a terça parte dessas árvores eram pereiras.

Quantas pereiras terá plantado o avô da Marta?

Situação C

O aquário da Joana contém peixes dourados, tartarugas e caracóis. Há 16 pernas, 10 conchas e 36 olhos no aquário.

Quantas criaturas de cada tipo estão no aquário?

Nota: Os caracóis têm 2 olhos, uma concha e uma perna.

Situação D

Cinco meninos participaram num torneio de xadrez.
Cada um deles jogou com todos os outros.
Quantas partidas jogaram ao todo?

Situação E

O João quer fazer uma sanduíche.

A mãe dele trouxe:

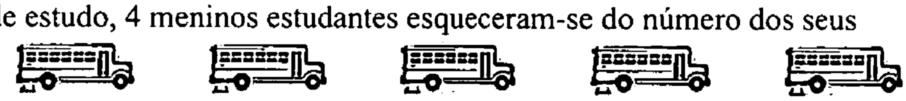
_três tipos de pão,
_ três tipos de queijo,
_ quatro tipos de carne.

O João quer utilizar apenas um ingrediente de cada tipo na sua sanduíche.

Quantas sanduíches diferentes pode ele fazer?

Situação F

Numa visita de estudo, 4 meninos estudantes esqueceram-se do número dos seus autocarros:



4 15 18 27 30

Aos poucos, os meninos foram-se lembrando de algumas informações:

- O autocarro do Carlos tinha o algarismo 1 no número;
- O número do autocarro do Beto podia dividir-se por 3;
- A soma dos dígitos do autocarro do Tiago era 9
- O número do autocarro do Tiago era maior do que o do Beto;
- O João sabia que o número do seu autocarro era igual a 2 vezes o número do autocarro do Carlos.

Ajuda os estudantes a encontrarem os seus autocarros.

Anexo 5

Guião da entrevista ao aluno

Tema: Caracterização do aluno
Público/alvo: Alunos do 1.º Ciclo
Objectivos:
☑ Conhecer a relação dos alunos com a escola/ambiente escolar;
☑ Conhecer a relação dos alunos com a Matemática;
☑ Perceber o que pensam os alunos acerca de *problemas de matemática* e da *resolução de problemas* na sala de aula.

Blocos	Objectivos	Tipo de questões
I Legitimação da entrevista e motivação do entrevistado	1. Dar a conhecer as finalidades da entrevista; 2. Motivar o entrevistado para colaborar; 3. Informar sobre o processo de recolha da informação; 4. Garantir a confidencialidade das opiniões e informações prestadas; 5. Garantir informação sobre o resultado final da investigação; 6. Explicitar o modo de condução da entrevista; 7. Informar da duração provável da entrevista; 8. Solicitar autorização para a gravação da entrevista.	• Dar a conhecer, de uma forma global, o projecto de investigação; • Solicitar e agradecer a prestimosa colaboração do entrevistado para o prosseguimento do estudo; • Disponibilizar o trabalho final que venha a ser realizado. • Propor a gravação da entrevista assegurando o carácter sigiloso das informações prestadas no decurso da mesma e no contexto académico;
II Dados do aluno	1. Conhecer dados do aluno - Em relação à sua vida pessoal; - Em relação ao seu percurso escolar;	• Solicitar ao aluno que diga: - A sua data do nascimento; - A sua morada actual e se teve outras; - Que pessoas compõem o seu agregado familiar; - As idades dessas pessoas; - Qual é a profissão dos pais. - Se frequentou ou não no Jardim-de-Infância e em caso afirmativo, quantos anos;

	- em relação aos seus gostos e preferências.	- Há quantos anos está nesta escola; - Se já ficou retido alguma vez durante a sua escolaridade; - Para onde vai depois das aulas e quem o acompanha; - Como ocupa os seus tempos livres; - Como gosta de brincar: sozinho ou acompanhado; - Que profissão gostaria de um dia poder exercer.
I I I Relação com a "escola"	1. Conhecer a relação dos alunos com a escola/ambiente escolar	• Pedir ao aluno que diga: - Se gosta andar na escola; - O que mais gosta na sua escola e o que menos gosta e que mudaria nela; - O que faz nas aulas; - Se tem dificuldades na escola (quais são); - Qual é o momento do dia que mais gosta e o que menos gosta; - O que é preciso para se ser bom aluno e se é um deles;
I V Relação com a Matemática	1. Conhecer a relação dos alunos com a Matemática	Solicitar que o aluno diga: - O que lhe vem à cabeça quando ouve a palavra matemática; - Se gosta de fazer matemática; - Do que aprendeu em Matemática, do que é que gostou mais e menos de trabalhar; - Em que actividade de matemática se lembra de ter participado e gostado muito; - Como gosta de aprender matemática (investigando situações, treinando os exercícios, resolvendo problemas – sozinho ou em grupos, (…); - O que pensa ser necessário fazer para se ser bom aluno a matemática na escola.
V Percepção acerca de problemas e de resolução de problemas	1. Recolher informações sobre o significado atribuído a *problemas* e a *Resolução de Problemas*	• Pedir ao entrevistado que diga: - O que é para si um problema de matemática. E um exercício; - Se gosta de participar na actividade de resolução de problemas e porquê; - Se já alguma vez inventou um problema para ser resolvido; (Solicitar que o faça)

		- Que tipo de problemas prefere resolver na aula de resolução de problemas (aqueles em que se descobre rapidamente qual é a operação que tem de se efectuar para chegar à resposta, ou aqueles em que se pode chegar à solução através de outros processos como o desenho, por exemplo); (Mostrar três situações para que o entrevistado escolha a que lhe dá mais prazer, e a que considera um problema para si);
		- De que maneiras já tem descoberto a solução para um problema;
		- De que parte da aula de resolução de problemas gosta mais: do momento em que resolve o problema ou do momento em que descreve aos colegas como fez;
	2. Perceber o gosto pelo trabalho de grupo	- Como é que prefere fazer a resolução de problemas: sozinho, aos pares ou em grupo. Porquê;
		- O que diria à sua professora para a convencer a colocar os alunos em grupo. (se disser que não é costume, mas gosta mais de trabalhar em grupo);
		- O que faz quando descobre que o caminho que escolheu para resolver um determinado problema não lhe permite chegar à resposta: decide tentar outra maneira, pede ajuda a um colega, pede ajuda à professora, copia por outro colega ou pára e espera que se faça em grupo;
		- Se costuma dar ideias ou ajudar um colega a perceber como se resolve algum problema;
		- Se se lembra de alguma coisa que já tivesse acontecido num trabalho em grupo e que tivesse gostado mais. E uma que tivesse gostado menos;
		- Como é que a professora pode ajudar os alunos na resolução de problemas;
		- Como é que os alunos podem aprender a resolver problemas;
		- Se quando explica as suas estratégias à turma, gosta mais de o fazer através da fala ou da escrita;

Anexo 6

Situações apresentadas ao aluno na entrevista

Situação A

O avô da Marta plantou 42 dezenas de árvores. Quando a Marta o foi visitar ele disse-lhe que só a terça parte dessas árvores eram pereiras.

Quantas pereiras terá plantado o avô da Marta?

Situação B

Cinco meninos participaram num torneio de xadrez.

Cada um deles jogou com todos os outros.

Quantas partidas jogaram ao todo?

Situação C

O João quer fazer uma sanduíche.

A mãe dele trouxe:

_três tipos de pão,

_ três tipos de queijo,

_ quatro tipos de carne.

O João quer utilizar apenas um ingrediente de cada tipo na sua sanduíche.

Quantas sanduíches diferentes pode ele fazer?